



# Politechnika Wroclawska

Złożoność obliczeniowa. „Trudne” zadania.

Wersja: 2



Wojciech Myszka  
2010-12-20 18:31:05 +0100

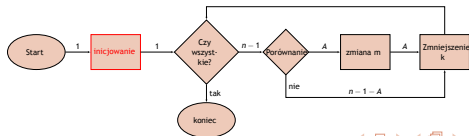


# Raz jeszcze min/max z liczb...

Danych jest  $n$  elementów  $X[1], X[2], \dots, X[n]$ ; szukamy takich  $m$  i  $j$ , że  $m = X[j] = \max_{1 \leq i \leq n} X[i]$  i  $j$  jest największym indeksem spełniającym ten warunek.

Algorytm wyglądać będzie tak:

1. **Inicjowanie** Niech  $j \leftarrow n$ ,  $k \leftarrow n - 1$ ,  $m \leftarrow X[n]$
2. **Czy wszystkie?** Jeśli  $k = 0$  to koniec
3. **Porównanie** Jeśli  $X[k] \leq m$  to przejdź do 5
4. **Zmiana  $m$**   $j \leftarrow k$ ,  $m \leftarrow X[k]$
5. **Zmniejsz  $k$**   $k \leftarrow k - 1$ ; przejdź do 2





# Raz jeszcze min/max z liczb...

Danych jest  $n$  elementów  $X[1], X[2], \dots, X[n]$ ; szukamy takich  $m$  i  $j$ , że  $m = X[j] = \max_{1 \leq i \leq n} X[i]$  i  $j$  jest największym indeksem spełniającym ten warunek.

Algorytm wyglądać będzie tak:

1. Inicjowanie Niech  $j \leftarrow n$ ,  $k \leftarrow n - 1$ ,  $m \leftarrow X[n]$
2. **Czy wszystkie?** Jeśli  $k = 0$  to koniec
3. Porównanie Jeśli  $X[k] \leq m$  to przejdź do 5
4. Zmiana  $m$   $j \leftarrow k$ ,  $m \leftarrow X[k]$
5. Zmniejsz  $k$   $k \leftarrow k - 1$ ; przejdź do 2





# Raz jeszcze min/max z liczb...

Danych jest  $n$  elementów  $X[1], X[2], \dots, X[n]$ ; szukamy takich  $m$  i  $j$ , że  $m = X[j] = \max_{1 \leq i \leq n} X[i]$  i  $j$  jest największym indeksem spełniającym ten warunek.

Algorytm wyglądać będzie tak:

1. Inicjowanie Niech  $j \leftarrow n$ ,  $k \leftarrow n - 1$ ,  $m \leftarrow X[n]$
2. Czy wszystkie? Jeśli  $k = 0$  to koniec
3. Porównanie Jeśli  $X[k] \leq m$  to przejdź do 5
4. Zmiana  $m$   $j \leftarrow k$ ,  $m \leftarrow X[k]$
5. Zmniejsz  $k$   $k \leftarrow k - 1$ ; przejdź do 2



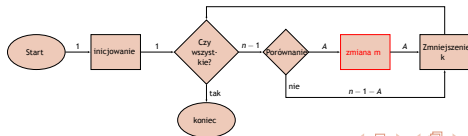


# Raz jeszcze min/max z liczb...

Danych jest  $n$  elementów  $X[1], X[2], \dots, X[n]$ ; szukamy takich  $m$  i  $j$ , że  $m = X[j] = \max_{1 \leq i \leq n} X[i]$  i  $j$  jest największym indeksem spełniającym ten warunek.

Algorytm wyglądać będzie tak:

1. Inicjowanie Niech  $j \leftarrow n, k \leftarrow n - 1, m \leftarrow X[n]$
2. Czy wszystkie? Jeśli  $k = 0$  to koniec
3. Porównanie Jeśli  $X[k] \leq m$  to przejdź do 5
4. Zmiana  $m \leftarrow X[k], j \leftarrow k$
5. Zmniejsz  $k \leftarrow k - 1$ ; przejdź do 2



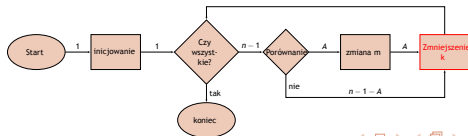


# Raz jeszcze min/max z liczb...

Danych jest  $n$  elementów  $X[1], X[2], \dots, X[n]$ ; szukamy takich  $m$  i  $j$ , że  $m = X[j] = \max_{1 \leq i \leq n} X[i]$  i  $j$  jest największym indeksem spełniającym ten warunek.

Algorytm wyglądać będzie tak:

1. Inicjowanie Niech  $j \leftarrow n, k \leftarrow n - 1, m \leftarrow X[n]$
2. Czy wszystkie? Jeśli  $k = 0$  to koniec
3. Porównanie Jeśli  $X[k] \leq m$  to przejdź do 5
4. Zmiana  $m \leftarrow X[k], j \leftarrow k$
5. Zmniejsz  $k \leftarrow k - 1$ ; przejdź do 2





# Analiza algorytmu

- ▶ Zajętość pamięci. W tym przypadku nic ciekawego – zapotrzebowanie na pamięć jest proporcjonalne do liczby danych.



# Analiza algorytmu

- ▶ Zajętość pamięci. W tym przypadku nic ciekawego — zapotrzebowanie na pamięć jest proporcjonalne do liczby danych.
- ▶ Dokładność. Praktycznie nie są wykonywane żadne operacje matematyczne zatem **nie dotyczy**.



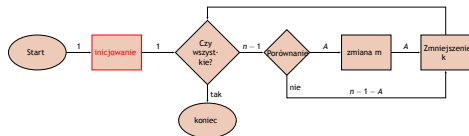


# Analiza algorytmu

- ▶ Zajętość pamięci. W tym przypadku nic ciekawego — zapotrzebowanie na pamięć jest proporcjonalne do liczby danych.
- ▶ Dokładność. Praktycznie nie są wykonywane żadne operacje matematyczne zatem **nie dotyczy**.
- ▶ Czas obliczeń. To może być ciekawe.



# Czas obliczeń



- ▶ Krok 1 wykonany będzie 1 raz.



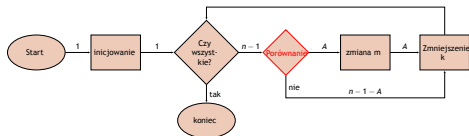
# Czas obliczeń



- ▶ Krok 1 wykonany będzie 1 raz.
- ▶ Krok drugi  $n$  razy.



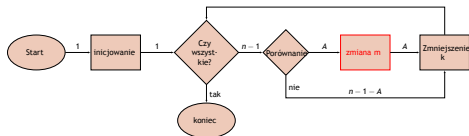
# Czas obliczeń



- ▶ Krok 1 wykonany będzie 1 raz.
- ▶ Krok drugi  $n$  razy.
- ▶ Krok 3  $n - 1$  razy.



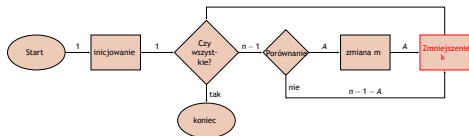
# Czas obliczeń



- ▶ Krok 1 wykonany będzie 1 raz.
- ▶ Krok drugi  $n$  razy.
- ▶ Krok 3  $n - 1$  razy.
- ▶ Krok 4  $A$  razy (jego wykonanie zależy od tego jakie są dane).



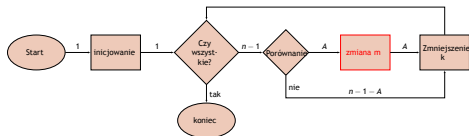
# Czas obliczeń



- ▶ Krok 1 wykonany będzie 1 raz.
- ▶ Krok drugi  $n$  razy.
- ▶ Krok 3  $n - 1$  razy.
- ▶ Krok 4  $A$  razy (jego wykonanie zależy od tego jakie są dane).
- ▶ Krok 5  $n - 1$  razy.



# Czas obliczeń



- ▶ Krok 1 wykonany będzie 1 raz.
- ▶ Krok drugi  $n$  razy.
- ▶ Krok 3  $n - 1$  razy.
- ▶ Krok 4  $A$  razy (jego wykonanie zależy od tego jakie są dane).
- ▶ Krok 5  $n - 1$  razy.

Zatem zajmiemy się liczbą wykonań kroku 4.



# Krok 4

## Średnia liczba wykonań

- ▶ Gdy dane wejściowe uporządkowane są w kolejności malejącej  $A = n - 1$





## Krok 4

### Średnia liczba wykonań

- ▶ Gdy dane wejściowe uporządkowane są w kolejności malejącej  $A = n - 1$
- ▶ Gdy dane wejściowe uporządkowane są w kolejności rosnącej  $A = 0$



## Krok 4

### Średnia liczba wykonań

- ▶ Gdy dane wejściowe uporządkowane są w kolejności malejącej  $A = n - 1$
- ▶ Gdy dane wejściowe uporządkowane są w kolejności rosnącej  $A = 0$
- ▶ A jaka będzie średnia?



# Przykład

Niech  $n = 3$ ; założmy również, że wszystkie liczby są różne. Wypiszmy wszystkie możliwe układy liczb  $X[1], X[2], X[3]$ :

Układ

Wartość A



# Przykład

Niech  $n = 3$ ; założmy również, że wszystkie liczby są różne. Wypiszmy wszystkie możliwe układy liczb  $X[1], X[2], X[3]$ :

Układ	Wartość A
$X[1] < X[2] < X[3]$	0



# Przykład

Niech  $n = 3$ ; założmy również, że wszystkie liczby są różne. Wypiszmy wszystkie możliwe układy liczb  $X[1], X[2], X[3]$ :

Układ	Wartość A
$X[1] < X[2] < X[3]$	0
$X[1] < X[3] < X[2]$	1



# Przykład

Niech  $n = 3$ ; załóżmy również, że wszystkie liczby są różne. Wypiszmy wszystkie możliwe układy liczb  $X[1], X[2], X[3]$ :

Układ	Wartość A
$X[1] < X[2] < X[3]$	0
$X[1] < X[3] < X[2]$	1
$X[2] < X[1] < X[3]$	0



# Przykład

Niech  $n = 3$ ; załóżmy również, że wszystkie liczby są różne. Wypiszmy wszystkie możliwe układy liczb  $X[1], X[2], X[3]$ :

Układ	Wartość A
$X[1] < X[2] < X[3]$	0
$X[1] < X[3] < X[2]$	1
$X[2] < X[1] < X[3]$	0
$X[2] < X[3] < X[1]$	1



# Przykład

Niech  $n = 3$ ; założmy również, że wszystkie liczby są różne. Wypiszmy wszystkie możliwe układy liczb  $X[1], X[2], X[3]$ :

Układ	Wartość A
$X[1] < X[2] < X[3]$	0
$X[1] < X[3] < X[2]$	1
$X[2] < X[1] < X[3]$	0
$X[2] < X[3] < X[1]$	1
$X[3] < X[1] < X[2]$	1





# Przykład

Niech  $n = 3$ ; załóżmy również, że wszystkie liczby są różne. Wypiszmy wszystkie możliwe układy liczb  $X[1], X[2], X[3]$ :

Układ	Wartość A
$X[1] < X[2] < X[3]$	0
$X[1] < X[3] < X[2]$	1
$X[2] < X[1] < X[3]$	0
$X[2] < X[3] < X[1]$	1
$X[3] < X[1] < X[2]$	1
$X[3] < X[2] < X[1]$	2



# Przykład

Niech  $n = 3$ ; załóżmy również, że wszystkie liczby są różne. Wypiszmy wszystkie możliwe układy liczb  $X[1], X[2], X[3]$ :

Układ	Wartość A
$X[1] < X[2] < X[3]$	0
$X[1] < X[3] < X[2]$	1
$X[2] < X[1] < X[3]$	0
$X[2] < X[3] < X[1]$	1
$X[3] < X[1] < X[2]$	1
$X[3] < X[2] < X[1]$	2

Jeżeli teraz założymy, że każdy z układów liczb  $X[1], X[2], X[3]$  jest jednakowo prawdopodobny, to średnia wartość A wyniesie (dla  $n = 3$ )  $(0 + 1 + 0 + 1 + 1 + 2)/6 = 5/6$ .



## Analiza. . .

Bez starty ogólności, możemy przyjąć, że liczby  $X[1], X[2], \dots, X[n]$  to liczby  $1, 2, \dots, n$  w pewnej kolejności. Dodatkowo założymy, że każda z  $n!$  permutacji jest jednakowo prawdopodobna.

*Tu wycinamy bardzo wiele rachunków. . .*

Z analizy rachunków wynika, że w przypadku gdy  $n = 12$  średnia dla zmiennej losowej  $A$  wynosi około 2,1, a wariancja około 1,54.



# Analiza algorytmu min/max. . .

- ▶ Algorytm jest bardzo prosty.
- ▶ Jedyne „operacje” wykonywane to *porównanie* (krok 2) i *zamiana* (krok 4).
- ▶ W zależności od liczby danych ( $n$ ) liczba porównań jest „stała” –  $n - 1$ , a liczba zamian jest jakimś ułamkiem  $n$ .

W takim przypadku piszemy że liczba zamian jest **proporcjonalna** do  $n$ , co zapisujemy czasami jako  $\sim n$ .

W teorii algorytmów częściej mówi się że „złożoność czasowa” algorytmu jest  $O(n)$  (co można czytać „**duże-O** od  $n$ ”).

Nie jest ważny współczynnik proporcjonalności, ważne jest jedynie to, że w raz ze wzrostem  $n$  rośnie **tak samo szybko** czas obliczeń.



# $O(n)$

Mamy dwa (hipotetyczne) problemy:

1. Pierwszy wykonuje się w czasie proporcjonalnym do  $n$
2. Drugi w czasie proporcjonalnym do  $\frac{1}{2}n$

Drugie zadanie wykonuje się dwa razy szybciej!

Oba zadania wykonują się w czasie  $O(n)$ ! Jest to zatem dosyć „grube” spojrzenie na czas obliczeń.



# Liniove wyszukiwanie

Mamy „książkę telefoniczną” – czyli listę  
<nazwisko, numer\_telefonu>.

Zadanie polega na znalezieniu numeru telefonicznego osoby o  
zadany m nazwisku.

Najprostszy algorytm jest taki

1.  $i \leftarrow 1$
2. Czy  $poszukiwane\_nazwisko = nazwisko(i)$
3. Jeżeli tak – **Koniec**
4. W przeciwnym razie  $i \leftarrow i + 1$
5. Jeżeli  $i > n$  **Koniec**: nie znaleziono!
6. W przeciwnym razie przejdź do kroku 2

Im dłuższa lista nazwisk tym dłużej pracuje algorytm.



## Liniove wyszukiwanie c. d.

- ▶ W najlepszym razie pętla wykonana będzie tylko jeden raz.
- ▶ W najgorszym razie –  $n$  razy.
- ▶ Średnio? To zależy jaki jest rozkład prawdopodobieństwa zapytań. . .



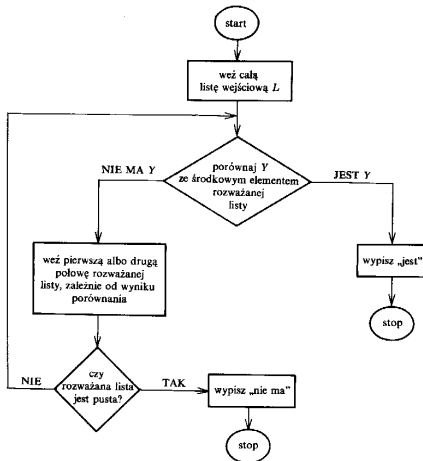
# Linioowe wyszukiwanie – lepszy algorytm

- ▶ Jeżeli uwzględnić fakt, że dane w książce telefonicznej są posortowane – algorytm można istotnie ulepszyć.
- ▶ Pierwsze porównanie należy wykonać nie z pierwszym (czy ostatnim) nazwiskiem, tylko ze środkowym (znajdującym się dokładnie na środku listy). Jeżeli szukane nazwisko jest większe – nie należy zajmować się pierwszą połową listy. . .
- ▶ Takie podejście w jednym kroku redukuje rozmiar zadania o połowę! Każdy kolejny krok jest podobny – zatem wielkość zadania zmniejsza się za każdym razem.
- ▶ W przypadku książki telefonicznej o  $N$  nazwiskach potrzeba (w najgorszym razie)  $\log_2(N)$  kroków.
- ▶ Złożoność algorytmu wynosi  $O(\log(N))$





# Liniowe wyszukiwanie – schemat blokowy





# Jak bardzo $O(\log(N))$ jest lepsze od $O(N)$ ?

$N$	$\log_2(N)$
10	4
100	7
1000	10
milion	20
miliard	30
miliard miliardów	60



# Pętle zagnieżdżone

1. wykonaj co następuje  $N - 1$  razy

...

1.1 wykonaj co następuje  $N - 1$  razy

...

Pętla wewnętrzna wykonywana jest  $N - 1$  razy dla każdego z  $N - 1$  wykonania pętli zewnętrznej.

Koszt czasowy dwu pętli jest zatem  $(N - 1)(N - 1)$  czyli  $N^2 - 2N + 1$ . Dla dużych  $N$  składniki  $1 - 2N$  są nieistotne. Zatem koszt czasowy takiej pętli jest  $O(N^2)$ .



# Koszt czasowy rekurencji

Rekurencyjny algorytm wyszukiwania minimum i maksimum w  $L$   
(znajdź-min-i-max-w  $L$ ):

1. jeśli  $L$  składa się z jednego elementu to nadaj  $MIN$  i  $MAX$  właśnie jego wartość; jeśli  $L$  składa się z dwu elementów, to nadaj  $MIN$  wartość mniejszego z nich, a  $MAX$  – większego;
2. w przeciwnym razie wykonaj co następuje:
  - 2.1 podziel  $L$  na połowy  $L_1$  i  $L_2$ ;
  - 2.2 wywołaj **znajdź-min-i-max-w**  $L_1$ , umieszczając otrzymane wartości w  $MIN_1$  i  $MAX_1$ ;
  - 2.3 wywołaj **znajdź-min-i-max-w**  $L_2$ , umieszczając otrzymane wartości w  $MIN_2$  i  $MAX_2$ ;
  - 2.4 nadaj  $MIN$  mniejszą wartość z  $MIN_1$  i  $MIN_2$ ;
  - 2.5 nadaj  $MAX$  większą wartość z  $MAX_1$  i  $MAX_2$ ;
3. wróć z wartościami  $MIN$  i  $MAX$



# Minimum i maksimum – wersja klasyczna (naiwna)

1.  $MIN \leftarrow L(1); MAX \leftarrow L(1)$
2.  $i \leftarrow 1$
3. jeżeli  $L(i) > MAX$  to  $MAX \leftarrow L(i)$
4. jeżeli  $L(i) < MIN$  to  $MIN \leftarrow L(i)$
5. jeżeli  $i < N$  to  $i \leftarrow i + 1$ , przejdź do 3
6. KONIEC

W tym algorytmie główna operacja to porównania; algorytm potrzebuje  $2N$  porównań.



# Analiza algorytmu rekurencyjnego I

1. jeśli  $N = 1$  lub  $N = 2$ , wykonuje się dokładnie jedno porównanie – punkt 1 procedury.
2. jeśli  $N > 2$ , to porównania, które się wykonuje, stanowią dokładnie dwa zbiory porównań dla list o długości  $N/2$  i dwa dodatkowe porównania (wiersze 2.4 i 2.5)

Zatem ( $C(N)$  oznacza liczbę porównań dla listy  $N$  elementowej)

$$C(1) = C(2) = 1 \quad (1)$$

$$C(N) = 2C(N/2) + 2 \quad (2)$$

(czemu jest to  $+2$ ?)



# Analiza algorytmu rekurencyjnego II

Można rozwiązać to równanie.

$$C(N) = 3N/2 - 2 = \frac{3}{2}N - 2 < 2N \quad (3)$$



# Wieże Hanoi

Złożoność czasowa podawanego algorytmu wynosi  $2^N - 1$  (gdzie  $N$  to liczba krążków).  
Zatem algorytm jest  $O(2^N)$





# Wieże Hanoi

## Alternatywny algorytm

(Zakładamy, że nasze trzy kołki są ustawione w kółko i że – na początku – wszystkie  $N$  krążków spoczywa na jednym z nich.)

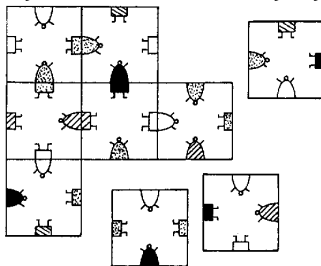
1. powtarzaj wykonywanie tego, co następuje, dopóty, dopóki, w chwili poprzedzającej podjęcie kroku 1.1 wszystkie krążki nie będą poprawnie ułożone na jakimś innym kołku:
  - 1.1 przenieś najmniejszy krążek z kołka, na którym właśnie spoczywa, na kołek następny w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara;
  - 1.2 wykonaj jedyne możliwe przeniesienie nie dotyczące najmniejszego krążka.

A jaka jest złożoność tego algorytmu?



# „Małpia układanka”

Prosta gra, w której do dyspozycji gracza jest kilka (9?) kwadratowych kart, na bokach których wydrukowane są górna i dolne połowy kolorowych małp. Zadanie polega na ułożeniu kart w postaci kwadratu ( $3 \times 3$ ), aby na zetknięciach się krawędzi połowy małp pasowały do siebie, a kolory były identyczne. . .





## Małpia układanka cd

- ▶ Najbardziej elementarny komputerowy algorytm „rozwiązywania” tej układanki sprowadzi się najprawdopodobniej, do przeglądu wszystkich możliwych układów kart.
- ▶ Wybieramy jedną z kart, układamy ją na pierwszym miejscu (odpowiednio wszystkie miejsca ponumerowaliśmy); na drugim miejscu mamy  $N - 1$  kart do wyboru, na kolejnym  $N - 2$ , itd. . .
- ▶ Następnie sprawdzamy czy spełnione są warunki.
- ▶ Zatem liczba możliwych do rozpatrzenia kombinacji wynosi:

$$N \times (N - 1) \times (N - 2) \times \dots \times 2 \times 1 = N! \quad (4)$$

Zatem złożoność tego algorytmu jest rzędu  $O(N!)$

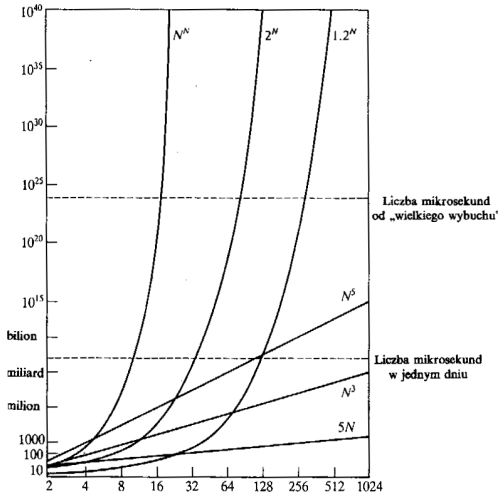


# Rozsądny i nierozsądny czas działania

Funkcja / N	10	50	100	300	1000
$5N$	50	250	500	1500	5000
$N \log_2(N)$	33	282	665	2469	9966
$N^2$	100	2500	10000	90000	1 milion (7 cyfr)
$N^3$	1000	125000	1 milion (7 cyfr)	27 milionów (8 cyfr)	1 miliard (10 cyfr)
$2^N$	1024	liczba 16-cyfrowa	liczba 31-cyfrowa	liczba 91-cyfrowa	liczba 302-cyfrowa
$N!$	3,6 miliona (7 cyfr)	liczba 65-cyfrów	liczba 161-cyfrowa	liczba 623-cyfrowa	niewyobrażalnie duża
$N^N$	10 miliardów (11 cyfr)	liczba 85-cyfrowa	liczba 201-cyfrowa	liczba 744-cyfrowa	niewyobrażalnie duża



# Wykresy różnych funkcji





## Tabela...

Funkcja \ $N$	10	20	50	100	300
$N^2$	1/10 000 sekundy	1/2500 sekundy	1/400 sekundy	1/100 sekundy	9/100 sekundy
$N^5$	1/10 sekundy	3,2 sekundy	5,2 minuty	2,8 godziny	28,1 dnia
$2^N$	1/1000 sekundy	1 sekunda	35,7 lat	400 bilionów stuleci	75-cyfrowa liczba stuleci
$N^N$	2,8 godziny	3,3 biliony lat	70-cyfrowa liczba stuleci	185-cyfrowa liczba stuleci	728-cyfrowa liczba stuleci

Dla porównania: „wielki wybuch” był w przybliżeniu 15 miliardów lat temu.

Zapotrzebowanie na czas dla hipotetycznych rozwiązań małej układanki  
(przy założeniu, że jedna instrukcja trwa jedną milisekundę)

(za [1])



# Zadania „łatwe” i „trudne” I

- ▶ Jak widać z wykresów i tabelk – zawsze można znaleźć zadanie którego nie da się rozwiązać w „rozsądnym czasie”.
- ▶ Przyjęto dzielić zadania na „łatwe” jeżeli funkcja opisująca czas ich wykonania jest ograniczona jakąś funkcją **wielomianową**.
- ▶ Zadania „trudne” to zadania o czasie wykonania **ponadwielomianowym** lub **wykładniczym**.

## Podsumowanie

Problemy trudno rozwiązywalne wymagają niepraktycznie dużo czasu nawet dla względnie małych danych wejściowych. Problemy łatwo rozwiązywalne mają algorytmy, które są praktyczne dla zadań o rozsądnych wymiarach.



# Wątpliwości

1. Komputery stają się coraz szybsze (ostatnio, w ciągu roku szybkość komputerów wzrastało dziesięciokrotnie). Być może za czas jakiś pojawi się komputer wystarczająco szybki by rozwiązywać „trudne zadania”?





# Wątpliwości

1. Komputery stają się coraz szybsze (ostatnio, w ciągu roku szybkość komputerów wzrastało dziesięciokrotnie). Być może za czas jakiś pojawi się komputer wystarczająco szybki by rozwiązywać „trudne zadania”?
2. Czy fakt, że nie znaleźliśmy lepszego algorytmu nie wskazuje na naszą niekompetencję? Może warto zwiększyć wysiłek aby polepszyć sytuację?



# Wątpliwości

1. Komputery stają się coraz szybsze (ostatnio, w ciągu roku szybkość komputerów wzrastało dziesięciokrotnie). Być może za czas jakiś pojawi się komputer wystarczająco szybki by rozwiązywać „trudne zadania”?
2. Czy fakt, że nie znaleźliśmy lepszego algorytmu nie wskazuje na naszą niekompetencję? Może warto zwiększyć wysiłek aby polepszyć sytuację?
3. Być może uda się znaleźć jakiś dowód, że problem nie ma rozsądnego algorytmu?



# Wątpliwości

1. Komputery stają się coraz szybsze (ostatnio, w ciągu roku szybkość komputerów wzrastało dziesięciokrotnie). Być może za czas jakiś pojawi się komputer wystarczająco szybki by rozwiązywać „trudne zadania”?
2. Czy fakt, że nie znaleźliśmy lepszego algorytmu nie wskazuje na naszą niekompetencję? Może warto zwiększyć wysiłek aby polepszyć sytuację?
3. Być może uda się znaleźć jakiś dowód, że problem nie ma rozsądnego algorytmu?
4. Czy „trudny problem” (małpiej układanki) nie jest przypadkiem jedynym takim zadaniem? Jest ono ciekawe, ale jakie ma praktyczne zastosowanie?



# Szybszy komputer

$O(?)$	Maksymalna liczba kart rozwiązywanych w ciągu godziny		
	na dzisiejszym komputerze	na komputerze 100 razy szybszym	na komputerze 1000 razy szybszym
$N$	$A$	$100 \times A$	$1000 \times A$
$N^2$	$B$	$10 \times B$	$31,6 \times B$
$2^N$	$C$	$C + 6,64$	$C + 9,97$



# Wymyślony algorytm

(o małpiej układance)

- ▶ Niestety nie. Znalaziono bardzo wiele (około 1000) problemów, które sprowadzają się do „przeglądu zupełnego” wszystkich możliwych wariantów (ustawień danych).
- ▶ Można zaproponować algorytmy „nierozsądne” nie udało się pokazać że może istnieć dokładny algorytm lepszy. . .
- ▶ Źródłem „trudnych” zadań są takie dziedziny jak kombinatoryka, badania operacyjne, ekonomia, teoria grafów i logika.



# Jak sobie radzimy z trudnymi zadaniami?

- ▶ **Zrównoleglenie** (zadanie dzielone jest na mniejsze kawałki i wysyłane na wiele komputerów).



# Jak sobie radzimy z trudnymi zadaniami?

- ▶ **Zrównoleglenie** (zadanie dzielone jest na mniejsze kawałki i wysyłane na wiele komputerów).
- ▶ **Randomizacja.** Zamiast przeglądać wszystkie możliwe rozwiązania w sposób losowy wybiera się niektóre z nich. Pozostają te, które w najlepszy sposób spełniają nasze oczekiwania.



# Jak sobie radzimy z trudnymi zadaniami?

- ▶ **Zrównoleglenie** (zadanie dzielone jest na mniejsze kawałki i wysyłane na wiele komputerów).
- ▶ **Randomizacja.** Zamiast przeglądać wszystkie możliwe rozwiązania w sposób losowy wybiera się niektóre z nich. Pozostają te, które w najlepszy sposób spełniają nasze oczekiwania.
- ▶ **Komputery kwantowe. ???**





# Jak sobie radzimy z trudnymi zadaniami?

- ▶ **Zrównoleglenie** (zadanie dzielone jest na mniejsze kawałki i wysyłane na wiele komputerów).
- ▶ **Randomizacja.** Zamiast przeglądać wszystkie możliwe rozwiązania w sposób losowy wybiera się niektóre z nich. Pozostają te, które w najlepszy sposób spełniają nasze oczekiwania.
- ▶ **Komputery kwantowe. ???**
- ▶ **Obliczenia molekularne. ???**



# Źródła



David Harel and Yishai Feldman.

*Rzecz o istocie informatyki: algorytmika.*

Klasyka informatyki. Wydawnictwa Naukowo-Techniczne,  
Warszawa, 2001, 2002, 2008.