

Lista 3

Zad. 1. Rozwiązać równania za pomocą metody uzmienniania stałych

- $y'' + 4y = tgx$
- $y'' - y = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}}$
- $y'' - y = -\frac{1}{\sin 2x\sqrt{\sin 2x}}$

Zad. 2. Rozwiązać równania za pomocą metody przewidywań

- $y'' + 2y = e^{-2x} + 2\sin x + \cos 2x$
- $y'' - 4y = x^3$
- $y'' - y = x \sin x$

Zad.3. Rozwiązać równania różniczkowe Eulera

- $x^2y'' - 2xy' + 6y = 0$
- $x^2y'' + xy' - y = x^2$
- $(x-2)^2y'' + 3(x-2)y' - 3y = 0$

Zad. 4. Stosując metodę eliminacji znaleźć rozwiązanie układu równań

- $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 1 + 4t - 2x - 4y \\ \frac{dy}{dt} = \frac{3}{2}t^2 + y - x \end{cases}$$
- $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^t - x - y \\ \frac{dy}{dt} = e^{-t} + y - x \end{cases}$$

Zad. 5. Znaleźć całkę szczególną danego układu równań spełniającą warunki początkowe:

- $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + \sin t \end{cases} \quad x(0)=1/4; y(0)=0$$
- $$\begin{cases} \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = e^{-t} - y \\ \frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = \sin t - 2y \end{cases} \quad x(0)=-2; y(0)=1$$

Lista 2

Zad. 1. Rozwiązać równanie Bernoulliego:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x} + x\sqrt{y}$$

Zad. 2. Znaleźć całkę ogólną równania:

- $(3x^2 - 2x - y + 1)dx + (2y - x + 3y^2)dy = 0$
- $\left(\frac{\sin 2x}{y} + 2x\right)dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2}\right)dy = 0$
- $\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^3 - 3x^2}{y^4}dy = 0$

Zad.3. Sprawdzić czy dana funkcja jest czynnikiem całkującym napisanego obok równania:

- $\mu(x, y) = x + y, (3x^2y + y^3)dx + (x^3 + 2xy^2)dy = 0$
- $\mu(y) = \cos y, 2xtgydx + (x^2 - 2 \sin y)dy = 0$

Znaleźć całkę ogólną.

Zad. 4. Znaleźć całkę ogólną równania

- $x^4 \ln x - 2xy^3)dx + 3x^2y^2dy = 0$
- $(2xy^2 - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0$

Zad. 5. Rozwiązać równania

- $y = \frac{1}{3}y'x - \frac{1}{6}(y')^2 + \frac{1}{3}x^2$
- $y = x(y')^2 - \frac{1}{y'}$
- $y = (1 + y')x + (y')^2$

Zad. 6. Rozwiązać równania

- $y' = xy'' + (y'')^2$
- $(y')^2 = 4(y' - 1)$

Zad.7. Rozwiązać równania spełniające warunki zadane początkowe. Zbadać zagadnienie istnienia i jednoznaczności:

- $y' = (y'')^2; y(0)=0, y'(0)=1; y(0)=0, y'(0)=0;$
- $4y' + y''^2 = 4xy'' \quad y(0)=0, y'(0)=-1; y(0)=0, y'(0)=0;$

Zad. 8 Rozwiązać równania

- $2yy'' = y'^2 + y^2$
- $1 + y'^2 = 2yy''$
- $y(y'')^2 = 1$

Zad. 9. Znaleźć krzywą całkową równania:

$$yy'' + y'^2 = 1,$$

Przechodzącą przez punkt (0,1) i będącą styczną w tym punkcie do prostej $x+y=1$.

Zad. 10. Znaleźć rozwiązania ogólne następujących równań, posługując się podanymi rozwiązaniami szczególnymi:

- $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$; $y_1 = \frac{\sin x}{x}$
- $(\cos x + \sin x)y'' - 2 \cos x \cdot y' + (\cos x - \sin x)y = 0$; $y_1 = \cos x$
- $(\cos x - \sin x)y'' + 2 \sin x \cdot y' + (\cos x + \sin x)y = 0$; $y_1 = e^x$
- $(1 - x^2)y'' - xy' + \frac{1}{4}y = 0$; $y_1 = \sqrt{1+x}$

Lista 1

Zad. 1. Rozwiązać równania

- $y' = \frac{y + \sqrt{y^2 - 4x^2}}{x}$
- $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$ znaleźć rozwiązania szczególne przechodzące przez punkty $M(1,1)$, $M(1,0)$ – wykonać rysunek.
- $y' = e^{-\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}$
- $y' = \frac{y^2 - 4xy}{2x^2 - 2xy - 2y^2}$

Zad.2. Rozwiązać równanie

$$y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2yx - x^2},$$

spełniające warunek początkowy $y(1) = -1$.

Zad. 3. Równanie

$$y' = \frac{y}{x} + \varphi\left(\frac{x}{y}\right)$$

doprowadzić do równania o rozdzielonych zmiennych. Jaka powinna być funkcja $\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$, żeby rozwiązanie ogólne miało postać:

$$y = \frac{x}{\ln|Cx|}.$$

Zad. 4. Znaleźć krzywą mającą tę własność, że kwadrat długości odcinka, który dowolna styczna do krzywej odcina od osi Oy , równa się iloczynowi współrzędnych punktu styczności.

Zad. 5. Rozwiązać równania liniowe metodą uzmienniania:

- $y' - \frac{1}{x}y = x$
- $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$
- $y' + x = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$
- $y' + \frac{1-2x}{x^2}y + 1 = 0$
- $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$
- $y' = \frac{y}{2y \ln y + y - x}$

Zad. 6. Rozwiązać równania liniowe metodą uzmienniania stałej oraz przewidywać:

- $y' + 2y = e^x \sin 2x$
- $y' - 5y = x^2 \cos x$

Zad. 7. Znaleźć równanie różniczkowe rodziny krzywych:

- $x^2 - y^2 - Cx = 0$
- $y - x^2 - x - C = 0$
- $y^2 - 2Cx - C^2 = 0$

Zad. 8. Wyznaczyć trajektorie ortogonalne rodziny krzywych:

- $x^2 - y^2 - Cx = 0$
- $y - x^2 - x - C = 0$
- $(2a - x)y^2 = x^3$

Zad.9. Znaleźć rodzinę trajektorii przecinających pod kątem $\alpha=60^\circ$ krzywe

$$x^2 = 2a(y - x\sqrt{3})$$