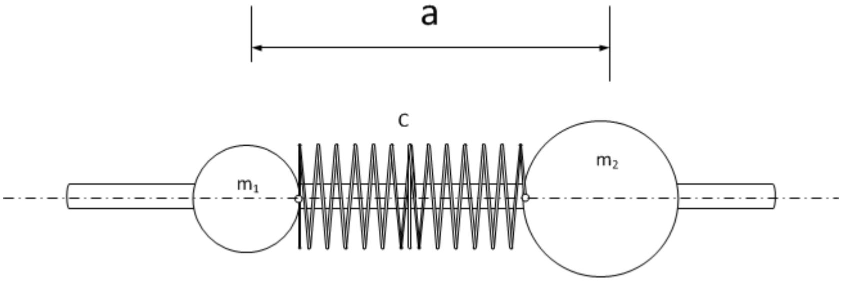
MECHANIKA ANALITYCZNA – LISTA ZADAŃ NR 4
DRGANIA O DWÓCH STOPNIACH SWOBODY
RÓWNANIA LAGRANGE'A (IIR)

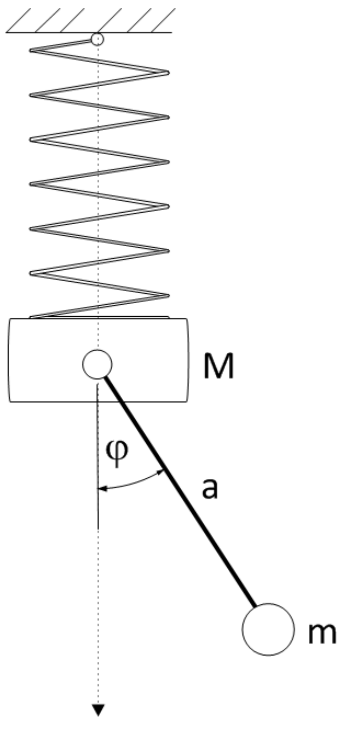
1. Korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju wyznaczyć równania różniczkowe ruchu układu mas (jak na rysunku) osadzonych suwliwie (bez tarcia) na poziomym pręcie. Masy połączone są sprężyną o sztywności c, a odległość między środkami mas przy nienapiętej sprężynie wynosi a. Wyznaczyć częstość rezonansową. Założyć zakres małych drgań (sinφ≈φ, cosφ≈1) i przyjąć, że w chwili t=0 wartości współrzędnych (oś x skierowana wzdłuż osi pręta) miały wartości $x_1(0)=0$, $x'_1(0)=V_o$, $x_2(0)=a$, $x'_2(o)=0$. Dane do obliczeń numerycznych: $m=m_1=2m_2=0.8$ kg, a=60 cm, c=40N/cm, $V_0=40$ cm/s



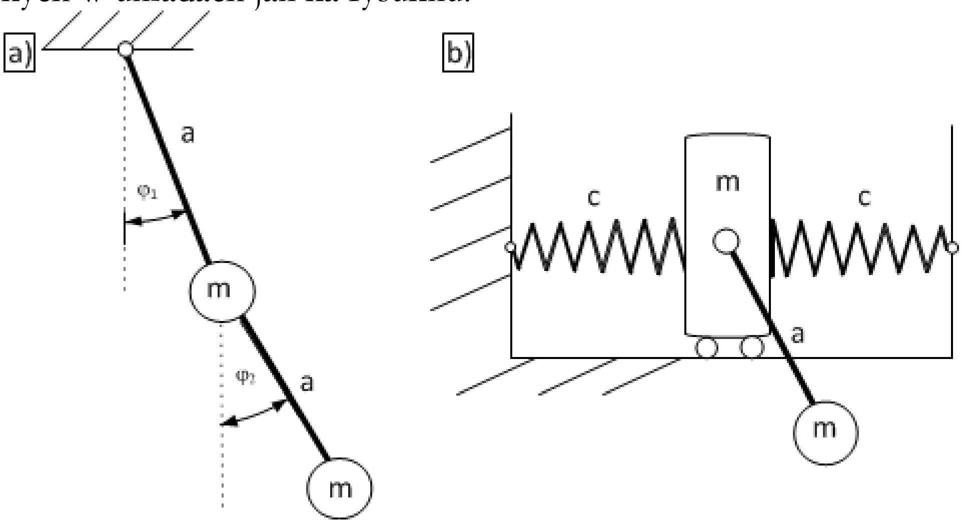
2. Zbadać drgania (równania ruchu oraz częstości drgań swobodnych) wagonu kolejowego w jego środkowej płaszczyźnie pionowej, jeżeli ciężar nadwozia wynosi Q. Odległość środka ciężkości od pionowych płaszczyzn przechodzących przez osie wagonów wynosi a. Promień bezwładności względem centralnej osi (równoległej do osi wagonu) wynosi ρ, a stałe resorów są jednakowe dla obu osi i wnoszą c (N/m).

3. Rozwiązać zadanie numer 2 uwzględniając przypadek, gdy nadwozie jest amortyzowane tłumikiem wiskotycznym o stałej tłumienia α zamocowanym na środku przedniej osi, a w środku tylnej belki przyłożono siłę sinusoidalnie zmienną w czasie: F(t)=Asin(ωt) [N].

4. Wahadło matematyczne (o długości a) o zostało podwieszone do masy M zawieszonej na sprężynie o sztywności c. Wyznacz równanie różniczkowe masy m oraz określ częstości drgań swobodnych układu w płaszczyźnie pionowej.



5. Korzystając z równań Lagrange'a II rodzaju wyznacz równania ruchu i określ częstości drgań własnych w układach jak na rysunku:



Do obliczeń numerycznych przyjmij następujące dane:
a=60 cm, c=45N/m, m=0.8kg

Dodatek do niniejszej listy zadań:

Równania Lagrange'a II rodzaju dla układów holonomicznych o idealnych więzach stacjonarnych mają postać ogólną:

$$\frac{d\left(\frac{\partial Ek}{\partial \dot{\varphi}_i}\right)}{dt} - \frac{\partial (Ek)}{\partial \varphi_i} = Q_i - R_i \qquad (1)$$

Gdzie: E_k - energia kinetyczna, potencjalna układu,
J_i – i-ta współrzędna uogólniona
Q_i – siła uogólniona związana z i-tą współrzędną uogólnioną
R_i – uogólniona siła oporu związana z i-tą współrzędną uogólnioną
i…n – liczba współrzędnych uogólnionych (stopni swobody)

Siłę uogólnioną Q_i można bezpośrednio wyznaczyć z równania sumy iloczynów wariacji współrzędnych uogólnionych:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} Q_i \varphi_i \quad (2)$$

W przypadku układów niedyssypatywnych, zachowawczych, holonomicznych o więzach stacjonarnych (idealnych) oraz przy braku sił zewnętrznych równania Lagrange'a II rodzaju można ująć następująco (najczęściej z tym mamy do czynienia w zadaniach z tej listy):

$$\frac{d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_i}\right)}{dt} - \frac{\partial (L)}{\partial \varphi} = 0$$

Gdzie: L (funkcja Lagrange'a)=E_k-E_p

Prowadzący:
Grzegorz Lesiuk
(Grzegorz.Lesiuk@pwr.wroc.pl)