Metoda rozwiązywania liniowych równań różniczkowych II rzędu o stałych współczynnikach

Liniowe równanie różniczkowe jednorodne II rzędu o stałych współczynnikach ma postać:

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = h(t), \tag{1}$$

gdzie x jest funkcją zmiennej niezależnej t, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Jeśli $h(t) = 0$ równanie jest jednorodne, jeśli $h(t) \neq 0$ równanie jest niejednorodne.

1. Rozwiązywanie równań jednorodnych

Poprzez postawienie $x = e^{rt}$, $\frac{dx}{dt} = re^{rt}$, $\frac{d^2x}{dt^2} = r^2e^{rt}$ uzyskujemy wielomian charakterystyczny postaci:

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2}$$

Rozwiązanie równania jednorodnego (1) zależy od wartości $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Jeśli $\Delta > 0$, to wielomian charakterystyczny (2) ma dwa pierwiastki rzeczywiste $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ oraz $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ i rozwiązanie równania różniczkowego ma postać:
$$x(t) = C_1e^{r_1t} + C_2e^{r_2t}.$$
2. Jeśli $\Delta = 0$, to wielomian charakterystyczny ma jeden podwójny pierwiastek rzeczywisty $r = \frac{-b}{2a}$ i rozwiązanie równania różniczkowego ma postać:
$$x(t) = C_1te^{rt} + C_2e^{rt}.$$
3. Jeśli $\Delta < 0$, to wielomian charakterystyczny ma dwa pierwiastki zespolone $r_1 = \frac{-b+\sqrt{\delta}i}{2a}$ oraz $r_2 = \frac{-b-\sqrt{\delta}i}{2a}$, które możemy napisać w prostszej formie przyjmując nowe oznaczenia $\alpha = \frac{-b}{2a}$, $\beta = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ jako $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$. Rozwiązanie równania różniczkowego ma wówczas postać:
$$x(t) = e^{\alpha t}(C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t)).$$

2. Rozwiązywanie równań niejednorodnych

Rozwiązanie równania niejednorodnego jest sumą dwóch rozwiązań: rozwiązania równania jednorodnego oraz szczególnego rozwiązania równania niejednorodnego $\varphi(t)$.

Postać szczególnego rozwiązaniania równania niejednorodnego zależy od postaci funkcji $h(t)$:

1. Jeśli $h(t) = e^{\alpha t}(a_kt^k + a_{k-1}t^{k-1} + ... + a_1t + a_0)$ oraz:
— jeśli α nie jest pierwiastkiem wielomianu (2), to $\varphi(t)$ ma postać:
$$\varphi(t) = e^{\alpha t}(A_kt^k + A_{k-1}t^{k-1} + ... + A_1t + A_0),$$
— jeśli α jest pojedyńczym pierwiastkiem wielomianu (2), to $\varphi(t)$ ma postać:
$$\varphi(t) = te^{\alpha t}(A_kt^k + A_{k-1}t^{k-1} + ... + A_1t + A_0),$$
— jeśli α jest podwójnym pierwiastkiem wielomianu (2), to $\varphi(t)$ ma postać:
$$\varphi(t) = t^2e^{\alpha t}(A_kt^k + A_{k-1}t^{k-1} + ... + A_1t + A_0).$$
2. Jeśli $h(t) = a\cos(\beta t) + b\sin(\beta t)$ oraz:
— jeśli βi nie jest pierwiastkiem wielomianu (2), to $\varphi(t)$ ma postać:
$$\varphi(t) = A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t),$$
— jeśli βi jest pierwiastkiem wielomianu (2), to $\varphi(t)$ ma postać:
$$\varphi(t) = t(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)).$$