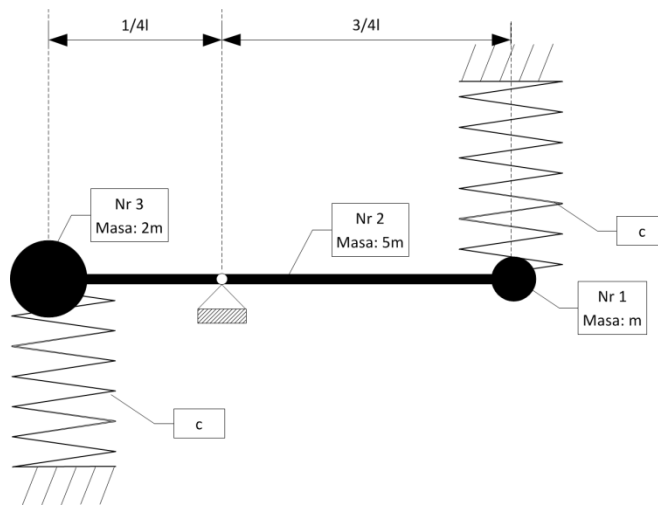


PRZYKŁAD ĆWICZENIOWY

DRGANIA O JEDNYM STOPNIU SWOBODY

Zad.1. Dla belki pokazanej na rysunku poniżej proszę wyznaczyć równanie ruchu oraz określić częstość drgań własnych. Dane są następujące: c – sztywność sprężyny [N/m], m – masa [kg], l – długość [m]. Należy przeanalizować dwa przypadki:

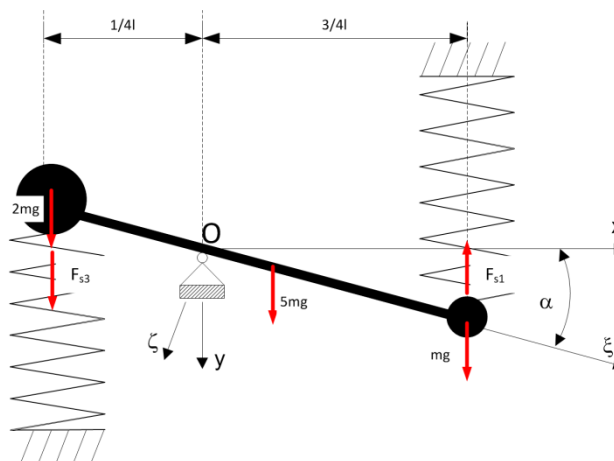
- Belka znajduje się w płaszczyźnie pionowej (uwzględniamy wpływ sił grawitacyjnych)
- Belka znajduje się w płaszczyźnie poziomej (wpływ sił grawitacyjnych pomijamy)



Rozwiązanie:

Przypadek z podpunktu a).

Do opisu drgań zawsze dobrze jest wybrać układ osi związany z położeniem statycznej równowagi. W przypadku a) pod wpływem sił ciężkości belka zajmie położenie tak jak na rysunku (odchylone od poziomu o kąt α).



Kąt obrotu belki można wyznaczyć wykorzystując równanie momentów względem przegubu 0 (lub bardziej ambitnie – zasadę prac przygotowanych). Równanie momentów przyjmie postać:

$$\sum M_o = 5mg \cdot \frac{1}{4}l - 2mg \frac{l}{4} + \frac{3}{4}mgl - F_{s1} \cdot \frac{3}{4}l - F_{s3} \cdot \frac{1}{4}l = 0 \quad (1)$$

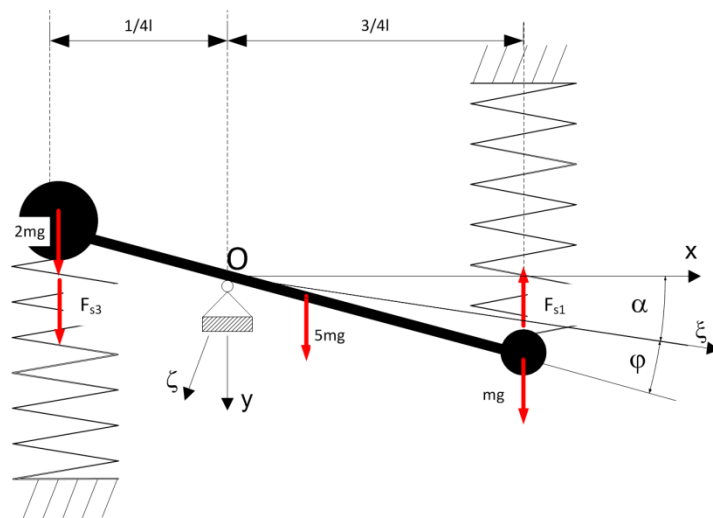
Siły w sprężynach wynoszą kolejno $F_{s1}=c\Delta X_1$, zaś $F_{s2}=c\Delta X_2$. Ponieważ $\Delta X_1=0.75l\alpha$, a $\Delta X_2=0.25l\alpha$ to ostatecznie równanie (1) przyjmie postać:

$$\frac{6}{4}mg - \frac{9}{16}cl\alpha - \frac{1}{16}cl\alpha = 0 \quad (2)$$

Z powyższego otrzymamy:

$$\alpha = \frac{12mg}{5cl}, [\alpha] = \left[\frac{\frac{kg \cdot \frac{N}{kg}}{\frac{N}{m}}}{\frac{N}{m}} \right] = [-] \quad (3)$$

Układ współrzędnych wygodnie jest ułożyć w miejscu statycznej równowagi. Z uwagi na fakt, że układ ma jeden stopień swobody, jako współrzędną uogólnioną przyjmujemy kąt φ .



Równanie ruchu wyprowadzimy, wykorzystując postać równania Lagrange'a II rodzaju dla sił potencjalnych. Wobec braku sił zewnętrznych równanie przyjmie postać:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (4)$$

Gdzie L oznacza funkcję Lagrange'a $L=E_k-E_p$. Wyznamy zatem kolejne człony równania. Energia kinetyczna układu może zostać zapisana jako:

$$E_k = \frac{I_o \cdot (\dot{\varphi})^2}{2} \quad (5)$$

Gdzie I_o oznacza moment bezwładności względem bieguna 0 układu dwóch mas skupionych i belki. Moment bezwładności I_o przyjmie wówczas formę:

$$I_o = 2m \cdot \left(\frac{l}{4} \right)^2 + m \cdot \left(\frac{3l}{4} \right)^2 + \frac{5m \cdot l^2}{12} + 5m \cdot \left(\frac{l}{4} \right)^2 = \frac{17ml^2}{12} \quad (6)$$

Po wstawieniu momentu bezwładności I_o do wyrażenia na energię kinetyczną otrzymamy:

$$E_k = \frac{17ml^2(\dot{\varphi})^2}{24} \quad (7)$$

Energia potencjalna układu składa się z energii potencjalnej sił sprężystości oraz energii potencjalnej sił grawitacyjnych. Skrócenia/wydłużenia sprężyn wynoszą kolejno ΔX_1 i ΔX_3 . Przy czym:

$$\Delta X_1 = \frac{3}{4}l \cdot (\alpha + \varphi), \Delta X_2 = \frac{1}{4}l \cdot (\alpha + \varphi) \quad (8)$$

Zatem energia potencjalna układu wyniesie:

$$E_p = \frac{c\left(\frac{3}{4}l \cdot (\alpha + \varphi)\right)^2}{2} + \frac{c\left(\frac{1}{4}l \cdot (\alpha + \varphi)\right)^2}{2} + 2mg \frac{l}{4}(\alpha + \varphi) - \frac{1}{4}l \cdot 5mg(\alpha + \varphi) - \frac{3}{4}mgl(\alpha + \varphi) \quad (9)$$

$$E_p = \frac{9c(\varphi + \alpha)^2 l^2}{32} + \frac{c(\varphi + \alpha)^2 l^2}{32} + 2mg \cdot \frac{1}{4}l(\varphi + \alpha) - \frac{3}{4}mgl(\varphi + \alpha) - 5mg \cdot \frac{1}{4}l(\varphi + \alpha)$$

Po uproszczeniach otrzymujemy ostateczną postać energii potencjalnej układu:

$$E_p = \frac{5c(\varphi + \alpha)^2 l^2}{16} - \frac{6}{4}mgl(\varphi + \alpha) \quad (10)$$

Funkcja Lagrange'a L zostanie wyrażona jako:

$$L = E_k - E_p = \frac{17ml^2(\dot{\varphi})^2}{24} - \frac{5c(\varphi + \alpha)^2 l^2}{16} + \frac{6}{4}mgl(\varphi + \alpha) \quad (11)$$

Obliczmy teraz poszczególne człony równania Lagrange'a:

$$\frac{d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right)}{dt} = \frac{17}{12}ml^2\ddot{\varphi} \quad (12)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{10cl^2(\alpha + \varphi)}{16} + \frac{6}{4}mgl = -\frac{10cl^2\alpha}{16} - \frac{10cl^2\varphi}{16} + \frac{6}{4}mgl \quad (13)$$

W powyższym równaniu należy zauważyć, że z równania momentów (1) w położeniu statycznej równowagi następuje równość członów:

$$\frac{10cl^2\alpha}{16} = \frac{6}{4}mgl \quad (14)$$

Wobec czego możemy pochodną cząstkową Lagranżjanu po współrzędnej uogólnionej zapisać jako:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{10cl^2}{16}\varphi \quad (15)$$

Równanie ruchu, po wstawieniu wszystkich komponentów równania Lagrange'a przyjmie postać:

$$\frac{17}{12}ml^2\ddot{\varphi} + \frac{10cl^2}{16}\varphi = 0 \quad (16)$$

Po uporządkowaniu otrzymamy ostateczną postać równania różniczkowego:

$$\ddot{\varphi} + \frac{120c}{272m} \varphi = 0 \quad (17)$$

Częstość drgań własnych układu wyniesie:

$$\omega = \sqrt{\frac{120c}{272m}} = 0,664 \sqrt{\frac{c}{m}} \quad (18)$$

Odpowiedź układu drgającego będzie postaci:

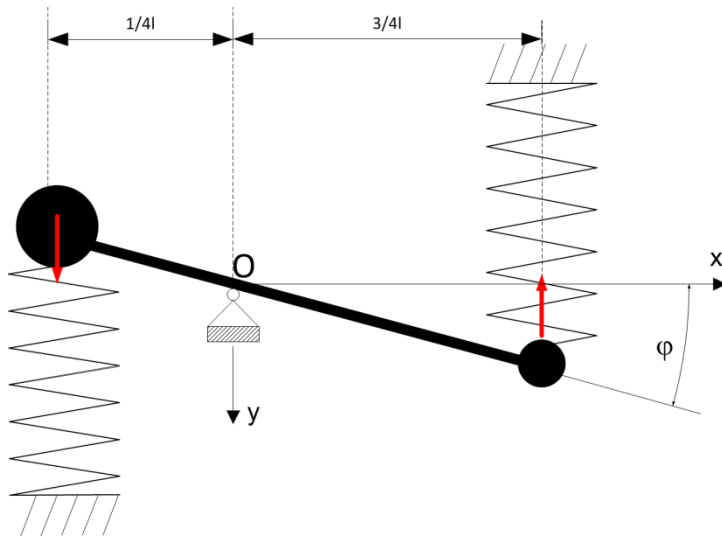
$$\varphi(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) \quad (19)$$

Gdzie A i B to są stałe, które należy wyznaczyć wykorzystując warunki początkowe – np.

$$\begin{cases} \varphi(0) = \varphi_0 \\ \dot{\varphi}(0) = \omega_0 \end{cases} \quad (20)$$

Przypadek z punktu b).

Układ tym razem znajduje się w płaszczyźnie poziomej tak więc położenie tak jak na rysunku poniżej jest już położeniem równowagowym.



Podobnie jak poprzednio – jako współrzędną uogólnioną przyjmujemy kąt obrotu belki φ . Energia kinetyczna przyjmie postać identyczną jak poprzednio, czyli:

$$E_k = \frac{17ml^2(\dot{\varphi})^2}{24} \quad (21)$$

Z uwagi na fakt, że belka jest w płaszczyźnie poziomej to energia potencjalna (uzależniona od kąta obrotu) będzie związana tylko z energią pochodzącą od sprężyn. Energia potencjalna sił grawitacyjnych w trakcie ruchu nie ulega zmianie i przyjmuje pewną stałą wartość – niech będzie to U_0 . Wówczas wyrażenie na energię potencjalną przyjmie postać:

$$E_p = \frac{5c(\varphi)^2 l^2}{16} + U_0 \quad (22)$$

Funkcja Lagrange'a w tym przypadku przyjmie zaś postać:

$$L = E_k - E_p = \frac{17ml^2(\dot{\varphi})^2}{24} - \frac{5c(\varphi)^2 l^2}{16} - U_0 \quad (23)$$

Poszczególne człony równania Lagrange'a wyniosą:

$$\frac{d(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}})}{dt} = \frac{17}{12} ml^2 \ddot{\varphi}, \quad (24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -\frac{10cl^2}{16} \varphi \quad (25)$$

Ostatecznie otrzymamy:

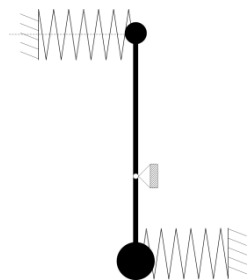
$$\frac{17}{12} ml^2 \ddot{\varphi} + \frac{10cl^2}{16} \varphi = 0 \quad (26)$$

Jak widać uzyskany wynik jest identyczny z wynikiem uzyskanym dla drgań w płaszczyźnie pionowej.

WNIOSEK:

W układach drgających (nie dotyczy to wahadeł!) zawierających elementy sprężyste siła grawitacji nie ma wpływu na postać równania różniczkowego ruchu ani na częstość drgań własnych. Dlatego też przy wyprowadzaniu równań ruchu zakłada się, że układ znajduje się w płaszczyźnie poziomej, co znacząco przyspiesza proces analizy takiego elementu.

Na zakończenie mała zagadka – czy gdyby sformułować zadanie identycznie (tzn. rozważyć drgania w płaszczyźnie pionowej i poziomej) dla układu jak na rysunku poniżej (tylko obróconym) to uzyskane wyniki były by identyczne?



Pytania, komentarze...

Grzegorz Lesiuk

Grzegorz.Lesiuk@pwr.wroc.pl

Tel. 71 -320 28 99