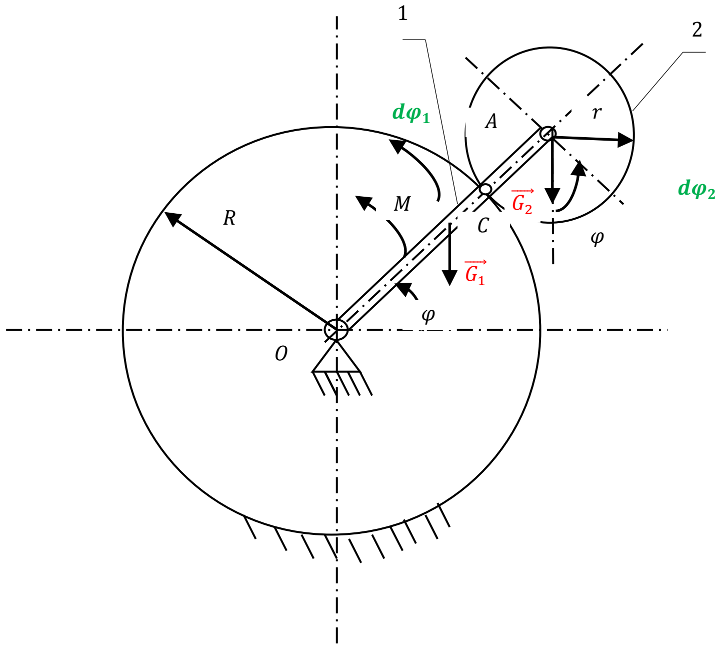
Materiał ćwiczeniowy opracowany przez Pana inż. Wojciecha Czaplę w ramach zadań zaliczeniowych z mechaniki analitycznej

Zad. 1. Zastosowanie równań Lagrange'a II rodzaju w opisie dynamiki układów o jednym stopniu swobody

Po nieruchomym kole leżącym w płaszczyźnie poziomej o promieniu R, toczy się bez poślizgu, jednorodna tarcza o promieniu r i masie m_2 poruszana korbą |OA|. Tarcza obraca się wokół nieruchomego punktu O pod wpływem działania pary sił o momencie M.



Dane: m_1, m_2, r, R, M

Obliczyć przyspieszenie kątowe korby o masie m_1, zakładając ją jako pręt jednorodny.

Rozwiązanie:

1. Wybieramy współrzędną uogólnioną.

$$\begin{cases} q_1 = \varphi_1 \\ \dot{q}_1 = \dot{\varphi}_1 \end{cases}$$

2. Wykorzystujemy postać równania Lagrange'a II rodzaju w polu niezachowawczym, tzn. $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \left(\frac{\partial E}{\partial \varphi_1}\right) = Q_j$ (jako E oznaczono energię kinetyczną)
3. Obliczamy energię kinetyczną całego układu.

$$E = E^{(1)} + E^{(2)}$$

Korba (1) porusza się ruchem obrotowym względem punktu O, więc jej energia kinetyczna wynosi:

$$E^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot I_o \cdot \dot{\varphi}_1{}^2$$

Tarcza porusza się ruchem płaskim, więc jej energia kinetyczna wynosi:

$$E^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_A{}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_A \cdot \dot{\varphi}_2{}^2$$

$$E = \frac{1}{2} \cdot I_o \cdot \dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_A{}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_A \cdot \dot{\varphi}_2{}^2$$

4. Obliczamy masowe momenty bezwładności I_o, I_A

Do wyznaczenia I_o korzystamy z tw. Steinera.

$$I_o = \frac{m_1(R+r)^2}{12} + m_1 \cdot \frac{(R+r)^2}{2} = \frac{m_1(R+r)^2}{3}$$

$$I_A = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot r^2$$

5. Uzależniamy kąt obrotu tarczy φ_2 od kąta obrotu korby φ_1

$$v_A = (R+r) \cdot \dot{\varphi}_1$$

$$v_A = r \cdot \dot{\varphi}_2$$

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{v_A}{r} = \frac{\boldsymbol{R+r}}{\boldsymbol{r}} \cdot \boldsymbol{\dot{\varphi}_1}$$

6. Podstawiamy dane do równania energii.

$$E = \frac{1}{2} \cdot I_o \cdot \dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_A{}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_A \cdot \dot{\varphi}_2{}^2 =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{m_1(R+r)^2}{3} \cdot \dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (R+r)^2 \cdot \dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot r^2 \cdot \left(\frac{\boldsymbol{R+r}}{\boldsymbol{r}}\right)^{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{\dot{\varphi}_1{}^2} =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot m_1(R+r)^2 \cdot \dot{\varphi}_1{}^2 + \frac{3}{4} \cdot m_2 \cdot (R+r)^2 \cdot \dot{\varphi}_1{}^2$$

7. Obliczamy pochodne występujące w równaniu Lagrange'a.

$$\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1} = \frac{1}{3} \cdot m_1(R+r)^2 \cdot \dot{\varphi}_1 + \frac{3}{2} \cdot m_2 \cdot (R+r)^2 \cdot \dot{\varphi}_1$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) = \frac{1}{3} \cdot m_1(R+r)^2 \cdot \ddot{\varphi}_1 + \frac{3}{2} \cdot m_2 \cdot (R+r)^2 \cdot \ddot{\varphi}_1$$

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi_1} = 0$$

8. Wyznaczamy siłę uogólnioną Q.

$$Q \cdot \delta\varphi_1 = \delta l$$

Obliczamy pracę wirtualną:

$$\delta l = \delta l^{(1)} + \delta l^{(2)}$$

$$\delta l^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} M_o(\vec{P_i}) \cdot \delta\varphi_1 = \left(M - \frac{R+r}{2} \cdot G_1 \cdot \cos(\varphi)\right) \cdot \delta\varphi_1$$

$$\delta l^{(2)} = \sum_{i=1}^{n} M_c(\vec{P_i}) \cdot \delta\varphi_2 = (-r \cdot G_2 \cdot \cos(\varphi)) \cdot \delta\varphi_2$$

Ponieważ:

$$\dot{\varphi}_2 = \frac{v_A}{r} = \frac{\boldsymbol{R+r}}{\boldsymbol{r}} \cdot \dot{\boldsymbol{\varphi}}_{\boldsymbol{1}}$$

To:

$$d\varphi_2 = \frac{\boldsymbol{R+r}}{\boldsymbol{r}} \cdot d\varphi_1$$

$$\delta l = \delta l^{(1)} + \delta l^{(2)} = \left(M - \frac{R+r}{2} \cdot G_1 \cdot \cos(\varphi)\right) \cdot \delta\varphi_1 + (-r \cdot G_2 \cdot \cos(\varphi)) \cdot \delta\varphi_2 =$$

$$\left(M - \frac{R+r}{2} \cdot G_1 \cdot \cos(\varphi)\right) \cdot \delta\varphi_1 + (-r \cdot G_2 \cdot \cos(\varphi)) \cdot \frac{R+r}{r} \cdot d\varphi_1 =$$

$$M \cdot \delta\varphi_1 - \frac{R+r}{2} \cdot G_1 \cdot \cos(\varphi) \cdot \delta\varphi_1 - G_2 \cdot \cos(\varphi) \cdot (R+r) \cdot d\varphi_1$$

$$Q \cdot \delta\varphi_1 = (M - \frac{R+r}{2} \cdot G_1 \cdot \cos(\varphi) - G_2 \cdot (R+r) \cdot \cos(\varphi)) \cdot d\varphi_1$$

$$Q = M - \frac{R+r}{2} \cdot G_1 \cdot \cos(\varphi) - G_2 \cdot (R+r) \cdot \cos(\varphi)$$

9. Wynikowe równanie ruchu ma postać:

$$\left(\tfrac{1}{3} \cdot m_1 \cdot (R+r)^2 + \tfrac{3}{2} \cdot m_2 \cdot (R+r)^2\right) \cdot \ddot{\varphi}_1 = M - \tfrac{R+r}{2} \cdot G_1 \cdot \cos(\varphi) - G_2 \cdot (R+r) \cdot \cos(\varphi)$$

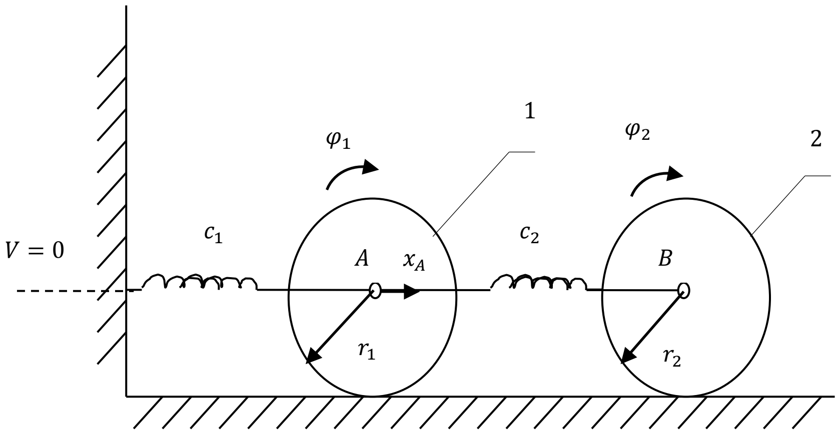
$$\ddot{\varphi}_1 = \frac{M - \frac{R+r}{2} \cdot G_1 \cdot \cos(\varphi) - G_2 \cdot (R+r) \cdot \cos(\varphi)}{\frac{1}{3} \cdot m_1 \cdot (R+r)^2 + \frac{3}{2} \cdot m_2 \cdot (R+r)^2} \; \frac{m}{s^2}$$

10. Wnioski:

Dla $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\quad Q = M$

Drgania o dwóch stopniach swobody

Zad.2 Korzystając z równań Lagrange'a wyprowadzić różniczkowe równania ruchu



Dane do zadania: c_1, c_2, m_1, m_2

1. Wybieramy współrzędne uogólnione (można wybrać także inaczej – tzn. x_1 i x_2).

$$\begin{cases} q_1 = x_A \\ \dot{q}_1 = \dot{x}_A \end{cases}$$
$$\begin{cases} q_2 = \varphi_2 \\ \dot{q}_2 = \dot{\varphi}_2 \end{cases}$$

2. Wykorzystujemy postać równania Lagrange'a II rodzaju w polu zachowawczym, tzn

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{q}_j}\right) - \left(\frac{\partial W}{\partial q_j}\right) = 0$$

$$\boldsymbol{\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{x}_A}\right) - \left(\frac{\partial W}{\partial x_A}\right) = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W}{\partial \dot{\varphi}_2}\right) - \left(\frac{\partial W}{\partial \varphi_2}\right) = 0 \end{cases}}$$

3. W to tzw. potencjał kinetyczny, który definiowany jest następująco:

$$W = E - V$$

4. Obliczamy sumaryczną energię kinetyczną całego układu:

$$E = E^{(1)} + E^{(2)}$$

$$E^{(1)} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \dot{x}_A{}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_A \cdot \dot{\varphi}_1{}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \dot{x}_A{}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot r_1{}^2 \cdot \frac{\dot{x}_A{}^2}{r_1{}^2} = \frac{3}{4} \cdot m_1 \cdot \dot{x}_A{}^2$$

$$E^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{x}_B{}^2 + \frac{1}{2} \cdot I_B \cdot \dot{\varphi}_2{}^2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \dot{\varphi}_2{}^2 \cdot r_2{}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot r_2{}^2 \cdot \dot{\varphi}_2{}^2$$
$$= \frac{3}{4} \cdot m_2 \cdot r_2{}^2 \cdot \dot{\varphi}_2{}^2$$

$$\boldsymbol{E = E^{(1)} + E^{(2)} = \frac{3}{4} \cdot m_1 \cdot \dot{x}_A{}^2 + \frac{3}{4} \cdot m_2 \cdot r_2{}^2 \cdot \dot{\varphi}_2{}^2}$$

5. Obliczamy sumaryczną energię potencjalną całego układu:

   Całkowita energia potencjalna układu jest sumą energii potencjalnej pochodzącej od mas i sprężyn. W naszym zadaniu mamy jedynie energie pochodzące od sprężyn.

$$V = V^{(1)} + V^{(2)}$$

$$V^{(1)} = 0 - energia\ potencjalna\ pochodząca\ od\ mas$$

$$V^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot {x_A}^2 + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot (x_B - x_A)^2$$

$$\boldsymbol{V = V^{(1)} + V^{(2)} = \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot {x_A}^2 + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot (x_B - x_A)^2}$$

6. Podstawiamy dane do potencjału kinetycznego.

$$\boldsymbol{W = E - V = \frac{3}{4} \cdot m_1 \cdot {\dot{x}_A}^2 + \frac{3}{4} \cdot m_2 \cdot {r_2}^2 \cdot {\dot{\varphi}_2}^2 - \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot {x_A}^2 - \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot (x_B - x_A)^2}$$

7. Wyznaczamy zależności kinematyczne.
   a) $\dot{x}_A = \omega_1 \cdot r_1$
   b) $\dot{x}_B = \dot{\varphi}_2 \cdot r_2$, więc:

      $\boldsymbol{x_B = \varphi_2 \cdot r_2}$, przy zerowych warunkach początkowych

8. Korzystając z wyznaczonych zależności kinematycznych podstawiamy do równania potencjału kinetycznego

$$W = E - V = \frac{3}{4} \cdot m_1 \cdot \boldsymbol{{\dot{x}_A}^2} + \frac{3}{4} \cdot m_2 \cdot {r_2}^2 \cdot \boldsymbol{{\dot{\varphi}_2}^2} - \frac{1}{2} \cdot c_1 \cdot \boldsymbol{{x_A}^2} - \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot (\boldsymbol{\varphi_2} \cdot r_2 - \boldsymbol{x_A})^2$$

9. W powyższym równaniu pozostały jedynie współrzędne uogólnione, więc możemy przystąpić do obliczania pochodnych do równań Lagrange'a.

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \boldsymbol{\dot{x}_A}} = \frac{3}{2} \cdot m_1 \cdot \boldsymbol{\dot{x}_A}$$

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \boldsymbol{\dot{x}_A}}\right) = \frac{3}{2} \cdot m_1 \cdot \boldsymbol{\ddot{x}_A}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \boldsymbol{x_A}} = -c_1 \cdot \boldsymbol{x_A} + c_2 \cdot \boldsymbol{\varphi_2} \cdot r_2 + c_2 \cdot \boldsymbol{x_A} = c_2 \cdot \boldsymbol{\varphi_2} \cdot r_2 - c_1 \cdot \boldsymbol{x_A} - c_2 \cdot \boldsymbol{x_A}$$

$$\frac{3}{2} \cdot m_1 \cdot \boldsymbol{\ddot{x}_A} - c_2 \cdot \boldsymbol{\varphi_2} \cdot r_2 + c_1 \cdot \boldsymbol{x_A} + c_2 \cdot \boldsymbol{x_A} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{\frac{3}{2} \cdot m_1 \cdot \ddot{x}_A - c_2 \cdot \varphi_2 \cdot r_2 + (c_1 + c_2) \cdot x_A = 0}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \boldsymbol{\dot{\varphi}_2}} = \frac{3}{2} \cdot m_2 \cdot {r_2}^2 \cdot \boldsymbol{\dot{\varphi}_2}$$

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}\left(\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \boldsymbol{\dot{\varphi}_2}}\right) = \frac{3}{2} \cdot m_2 \cdot {r_2}^2 \cdot \boldsymbol{\ddot{\varphi}_2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{W}}{\partial \boldsymbol{\varphi_2}} = -c_2 \cdot {r_2}^2 \cdot \varphi_2 + c_2 \cdot x_A \cdot r_2$$

$$\boldsymbol{\frac{3}{2} \cdot m_2 \cdot {r_2}^2 \cdot \ddot{\varphi}_2 + c_2 \cdot {r_2}^2 \cdot \varphi_2 - c_2 \cdot x_A \cdot r_2 = 0}$$

10. Szukany układ równań różniczkowych ruchu dla przyjętych współrzędnych przedstawia się następująco:

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \cdot m_1 \cdot \ddot{x}_A - c_2 \cdot \varphi_2 \cdot r_2 + (c_1 + c_2) \cdot x_A = 0 \\ \frac{3}{2} \cdot m_2 \cdot {r_2}^2 \cdot \ddot{\varphi}_2 + c_2 \cdot {r_2}^2 \cdot \varphi_2 - c_2 \cdot x_A \cdot r_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \cdot m_1 \cdot \ddot{x}_A - c_2 \cdot \varphi_2 \cdot r_2 + (c_1 + c_2) \cdot x_A = 0 \\ \frac{3}{2} \cdot m_2 \cdot r_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 + c_2 \cdot r_2 \cdot \varphi_2 - c_2 \cdot x_A = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} \cdot m_1 \cdot \ddot{x}_A - c_2 \cdot \varphi_2 \cdot r_2 + (c_1 + c_2) \cdot x_A = 0 \\ \frac{3}{2} \cdot m_2 \cdot r_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 + c_2 \cdot (r_2 \cdot \varphi_2 - x_A) = 0 \end{cases}$$