

**Przykład analizy i rozwiązania zadania z równań różniczkowych
liniowych niejednorodnych - lista 2 (zad. 1f)**

Zad. 1. Znaleźć całkę szczególną równania

$$y' \sin x \cos x = y + \sin^3 x, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad (1)$$

Przed przystąpieniem do rozwiązywania powyższego równania grupujemy wyrazy (przy założeniu, że $\sin x \cos x \neq 0$):

$$y' - \frac{1}{\sin x \cos x} y = \frac{\sin^2 x}{\cos x} \quad (2)$$

Zagadnienie rozwiążemy dwoma sposobami (poznany wcześniej na ćwiczeniach): tj.

- metodą uzmienniania stałej (MUS),
- metodą czynnika całkującego (MCC).

SPOSÓB I - METODA UZMIENNIANIA STAŁEJ

Pierwszym etapem rozwiązywania równania (2) jest rozwiązanie równania różniczkowego jednorodnego:

$$y' - \frac{1}{\sin x \cos x} y = 0 \quad (3)$$

Po rozdzieleniu zmiennych otrzymujemy:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{\sin x \cos x} \quad (4)$$

Następnie całkujemy obustronnie wyrażenie (4):

$$\ln |y| = \int \frac{dx}{\sin x \cos x}$$

Całkę $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$ (oznaczymy ją jako I_1) rozwiążemy poniżej wykorzystując metodę postawiania:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{dx}{\sin x \cos x} \left\{ \begin{array}{l} \sin x = u \\ \cos x dx = du \\ dx = \frac{du}{\cos x} \end{array} \right\} = \int \frac{du}{u \cos^2 x} = \int \frac{du}{u(1 - \sin^2 x)} = \\ &= \int \frac{du}{u(1 - u^2)} = \int \frac{du}{u(1 - u)(1 + u)} = I_{1a} \end{aligned}$$

W wyniku przekształceń uzyskaliśmy całkę z funkcji wymiernej (I_{1a}). Rozłożmy funkcję podcałkową $\frac{1}{u(1-u)(1+u)}$ na ułamki proste:

$$\frac{1}{u(1-u)(1+u)} = \frac{A}{u} + \frac{B}{u-1} + \frac{C}{u+1} = \frac{A(u-1)(u+1) + B(u+1)u + Cu(u-1)}{u(u-1)(u+1)}$$

$$\frac{A(u-1)(u+1) + B(u+1)u + Cu(u-1)}{u(u-1)(u+1)} = \frac{u^2(B-A-C) + u(B+C) + A}{u(u-1)(u+1)}$$

Porównanie stron wielomianów w licznikach prowadzi nas do układu równań:

$$\begin{cases} B - A - C = 0 \\ B + C = 0 \\ A = 1 \end{cases} \quad (5)$$

Rozwiązaniem układu równań (5) jest zbiór liczb: $A = 1, B = 0.5, C = -0.5$.

Zatem możemy naszą całkę I_{1a} zapisać następująco:

$$\int \frac{du}{u} + \int \frac{0.5du}{1-u} - \int \frac{0.5du}{1+u} = \ln|u| - 0.5 \ln|1-u| - 0.5 \ln|1+u| + const$$

Po uporządkowaniu i skorzystaniu z własności logarytmów możemy otrzymać:

$$\ln \left| \frac{u}{\sqrt{(1-u)(1+u)}} \right| = \ln \left| \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right|$$

Wracając do zmiennej x otrzymujemy:

$$\ln \left| \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \right| = \ln \left| \frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \right| = \ln \left| \frac{\sin x}{\cos x} \right| = \ln |tgx|$$

Tak więc, równanie (4) przyjmuje postać:

$$\ln |y| = \ln |tgx| + \ln C = \ln C |tgx| \quad (6)$$

Po opuszczeniu logarytmów i wartości bezwzględnych (pamiętamy o tym, że stała C przyjmuje dowolną wartość zatem $\tilde{C} = \pm C$) otrzymujemy ogólną konstrukcję rozwiązania równania (2):

$$y = \tilde{C}tgx \quad (7)$$

Kolejnym etapem rozwiązywania zadania jest *uzmiennienie stałej*. Zatem zakładamy, że $\tilde{C}$ jest pewną funkcją zmiennej x , czyli:

$$y = \tilde{C}(x)tgx \quad (8)$$

Skoro funkcja (8) jest zakładanym rozwiązaniem równania różniczkowego (2) to powinna je spełniać. Aby to sprawdzić potrzebujemy także i pochodnej funkcji $y = \tilde{C}(x)tgx$:

$$y' = \tilde{C}'(x)tgx + \tilde{C}\frac{1}{\cos^2 x} \quad (9)$$

Wstawiamy otrzymane wyrażenia (8) oraz (9) do równania wyjściowego (2):

$$\tilde{C}'(x)tgx + \tilde{C}\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin x \cos x} \tilde{C}(x)tgx = \frac{\sin^2 x}{\cos x} \quad (10)$$

Po redukcji otrzymujemy:

$$\tilde{C}'(x)tgx = \frac{\sin^2 x}{\cos x} \quad (11)$$

Po uporządkowaniu powyższe równanie przyjmie postać:

$$\tilde{C}'(x) = \sin x$$

Całkując to wyrażenie otrzymujemy:

$$\tilde{C} = -\cos x + D, D = \text{const} \quad (12)$$

Wstawiamy uzyskane rozwiązanie (12) do równania (8):

$$y = (-\cos x + D)tgx = -\sin x + Dtgx \quad (13)$$

W ten sposób otrzymaliśmy całkę ogólną równania. Stałą D wyznaczymy w oparciu o warunek brzegowy $y(\frac{\pi}{4}) = 0$.

$$0 = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + Dtg\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2} + D \cdot 1 \Rightarrow D = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Zatem całka szczególna ma postać:

$$y = -\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}tgx \quad (14)$$

SPOSÓB II - METODA CZYNNIKA CAŁKUJĄCEGO

W celu identyfikacji czynnika całkującego należy doprowadzić równanie różniczkowe do postaci:

$$y' + p(x)y = h(x) \quad (15)$$

W naszym przypadku $p(x) = -\frac{1}{\sin x \cos x}$, zaś $h(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$. Czynniki całkujące dla równania rzędu I liniowego niejednorodnego zdefiniowany jest jako:

$$I = e^{\int p(x) dx} \quad (16)$$

Dla naszego równania czynnik całkujący (16) ma postać:

$$I = e^{\int \frac{-1}{\sin x \cos x} dx} \quad (17)$$

Rozwiązanie całki w wykładniku funkcji (17) zostało opisane już wcześniej. Zatem czynnik całkujący ma ostateczną postać:

$$I = e^{-\ln|\operatorname{tg} x|} = e^{\ln|\operatorname{ctg} x|} = |\operatorname{ctg} x| \quad (18)$$

Mnożymy zatem obydwie strony równania (2) przez funkcję uzyskaną w (18).

$$y' \operatorname{ctg} x - \frac{1}{\sin x \cos x} y \operatorname{ctg} x = \sin x \quad (19)$$

Zauważamy, że lewa strona powyższego równania jest pochodną iloczynu funkcji $y(x)$ i $\operatorname{ctg} x$. Zatem:

$$(y \operatorname{ctg} x)' = \sin x \Rightarrow y \operatorname{ctg} x = -\cos x + D, D = \text{const} \quad (20)$$

Co ostatecznie prowadzi do uzyskania rozwiązania w postaci całki ogólnej:

$$y = -\sin x + D \operatorname{tg} x \quad (21)$$

Jak widać uzyskane rozwiązanie jest tożsame z rozwiązaniem uzyskanym przy pomocy metody uzmienniania stałej. Stałą D wyznaczamy podobnie jak poprzednio z warunków początkowych.