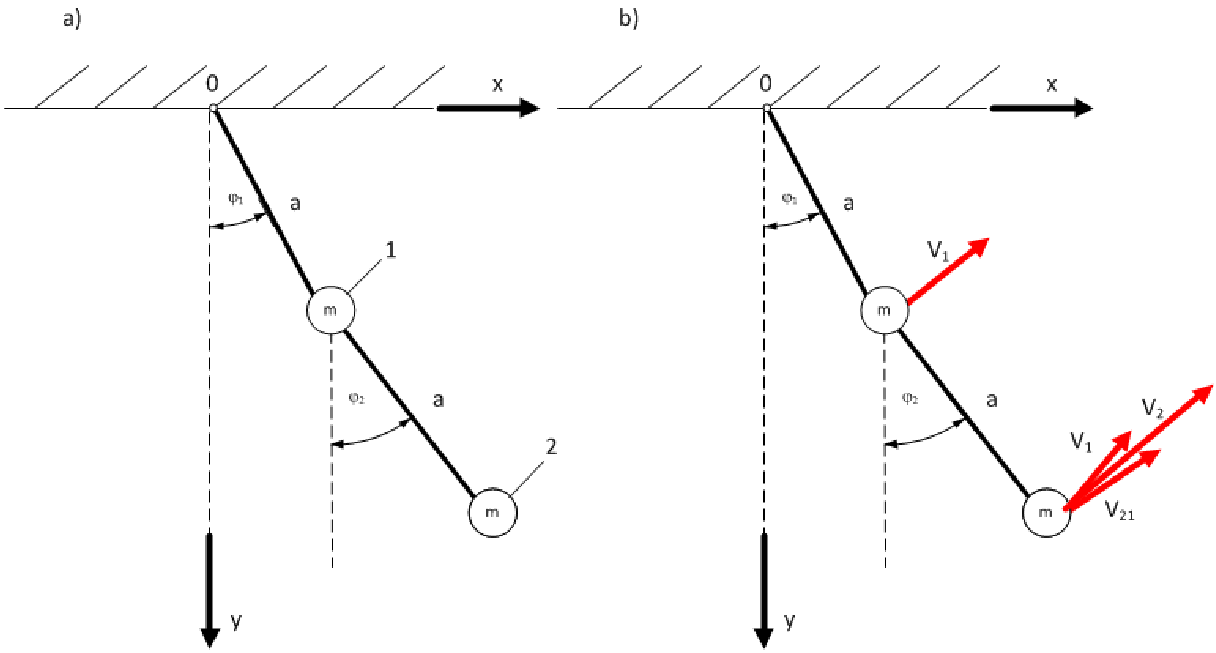
Materiały dydaktyczne do ćwiczeń z mechaniki analitycznej

Zastosowania równań Lagrange'a II rodzaju do opisu dynamiki układów o dwóch stopniach swobody

Zad.1. Dla podwójnego wahadła matematycznego (jak na rysunku poniżej) wyznacz równania ruchu mas m oraz znajdź główne częstości małych drgań swobodnych nietłumionych układu w płaszczyźnie pionowej.



Rys. 1. a) Schemat i oznaczenia, b) wektory prędkości

Jako współrzędne uogólnione najwygodniej jest zmiennych φ_1 i φ_2. Z uwagi na fakt znajdowania się mas w polu zachowawczym oraz braku sił aktywnych do opisu dynamiki wykorzystamy następującą postać równań Lagrange'a:

$$\begin{cases} \dfrac{d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}\right)}{dt} - \dfrac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0 \\ \dfrac{d\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}\right)}{dt} - \dfrac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Gdzie L reprezentuje tzw. Funkcję Lagrange'a tj. potencjał kinetyczny $L=E_k-E_p$. Tak, więc, obliczmy energię kinetyczną E_k układu. Masa pierwsza porusza się ruchem obrotowym względem przegubu 0 więc z obliczeniem jej energii kinetycznej nie ma najmniejszych kłopotów. W przypadku drugiej masy problem jest znacznie bardziej złożony z uwagi na rodzaj ruchu drugiej masy. Masa druga porusza się ruchem złożonym, gdzie prędkością unoszenia jest prędkość pierwszej masy (punkt zaczepienia)V_1, a prędkością względną jest prędkość liniowa w ruchu obrotowym drugiej masy względem pierwszej (V_{21}). Tak, więc:

$$\overrightarrow{V_2} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_{21}} \quad (2)$$

Z uwagi na fakt, że do energii kinetycznej wchodzi kwadrat modułu wektora prędkości to warto wektor prędkości bezwzględnej rozłożyć na składowe V_{2x} i V_{2y}:

$$\left|\overrightarrow{V_2}\right|^2 = \left|\overrightarrow{V_{2x}}\right|^2 + \left|\overrightarrow{V_{2y}}\right|^2 \quad (3)$$

W układzie współrzędnych składowe modułu wektora prędkości (3) można wyrazić:

$$\overrightarrow{V_{2x}} = a\dot{\varphi}_1 cos\varphi_1 + a\dot{\varphi}_2 cos\varphi_2 \quad (4)$$

$$\overrightarrow{V_{2y}} = -a\dot{\varphi}_1 sin\varphi_1 - a\dot{\varphi}_2 sin\varphi_2 \quad (5)$$

$$\left|\vec{V}_2\right|^2 = (a\dot{\varphi}_1 cos\varphi_1 + a\dot{\varphi}_2 cos\varphi_2)^2 + (a\dot{\varphi}_1 sin\varphi_1 + a\dot{\varphi}_2 sin\varphi_2)^2(-1)^2 \quad (6)$$

$$\left|\vec{V}_2\right|^2 = a^2\dot{\varphi}_1^2 sin^2\varphi_1 + 2a^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 sin\varphi_1 sin\varphi_2 + a^2\dot{\varphi}_2^2 sin^2\varphi_2 + a^2\dot{\varphi}_1^2 cos^2\varphi_1 + 2a^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 cos\varphi_1 cos\varphi_2 + a^2\dot{\varphi}_2^2 cos^2\varphi_2 \quad (7)$$

Biorąc pod uwagę fakt, że rozważamy tzw. zakres małych drgań można zastosować następujące przybliżenia $sin\varphi \approx \varphi$ oraz $cos\varphi \approx 1-\varphi^2/2$ (rozwinięcie Taylora), a także iloczyn $\varphi_1 \cdot \varphi_2 = 0$ (małe wyższego rzędu). Wówczas równanie (7) przyjmie następującą postać:

$$\left|\vec{V}_2\right|^2 = a^2\dot{\varphi}_1^2 + 2a^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + a^2\dot{\varphi}_2^2 \quad (8)$$

Zaś energia kinetyczna układu wyniesie:

$$E_k = \frac{ma^2\dot{\varphi}_1^2}{2} + m\frac{a^2\dot{\varphi}_1^2 + 2a^2\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + a^2\dot{\varphi}_2^2}{2} = ma^2\dot{\varphi}_1^2 + ma^2(\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2) \quad (9)$$

Kolejnym krokiem jest wyznaczenie energii potencjalnej układu – w naszym przypadku mamy do czynienia tylko z energią potencjalną sił ciężkości. Energia potencjalna (Ep) oznacza pracę, wykonaną przez układ przy sprowadzaniu jego od położenia wychylonego do położenia równowagi. Energia ta wyraża się następującą zależnością:

$$E_p = mga(1 - cos\varphi_1) + mg(a(1 - cos\varphi_2) + a(1 - cos\varphi_1) \quad (10)$$

Po uwzględnieniu $cos\varphi \approx 1-\varphi^2/2$ otrzymujemy:

$$E_p = mga\varphi_1^2 + 0.5mga\varphi_2^2 \quad (11)$$

Zatem, ostatecznie funkcja Lagrange'a przyjmie następującą postać:

$$L = ma^2\dot{\varphi}_1^2 + ma^2(\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2 + \dot{\varphi}_2^2) - mga\varphi_1^2 - 0.5mga\varphi_2^2 \quad (12)$$

Teraz można przystąpić do obliczania poszczególnych członów równań (1):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} = 2ma^2\dot{\varphi}_1 + ma^2\dot{\varphi}_2 \quad (13)$$

Różniczkując po czasie (13):

$$\frac{d\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1}}{dt} = 2ma^2\ddot{\varphi}_1 + ma^2\ddot{\varphi}_2 \quad (14)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 2mga\varphi_1 \quad (15)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} = ma^2\dot{\varphi}_1 + ma^2\dot{\varphi}_2 \quad (16)$$

$$\frac{d\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2}}{dt} = ma^2\ddot{\varphi}_1 + ma^2\ddot{\varphi}_2 \quad (17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 2mga\varphi_2 \quad (18)$$

Po uzyskaniu wszystkich członów równania (1) można ostatecznie zapisać układ równań różniczkowych:

$$\begin{cases} 2ma\ddot{\varphi}_1 + ma\ddot{\varphi}_2 + 2mg\varphi_1 = 0 \\ ma\ddot{\varphi}_1 + ma\ddot{\varphi}_2 + mg\varphi_2 = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Układ równań (19) opisuje dynamikę mas. W celu określenia częstości głównych drgań swobodnych układu należy rozwiązać układ równań (19). Korzystając ze znanych sposobów rozwiązywania równań różniczkowych np. metody przewidywań znajdujemy następujące postacie rozwiązań względem φ_1 i φ_2:

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = Asin(\omega t + \gamma) \\ \varphi_2(t) = Bsin(\omega t + \gamma) \end{cases} \quad (20)$$

Pierwsze pochodne mają postać:

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1(t) = A\omega cos(\omega t + \gamma) \\ \dot{\varphi}_2(t) = B\omega cos(\omega t + \gamma) \end{cases} \quad (21)$$

Drugie pochodne wynoszą:

$$\begin{cases} \ddot{\varphi}_1(t) = -A\omega^2 sin(\omega t + \gamma) \\ \ddot{\varphi}_2(t) = -B\omega^2 sin(\omega t + \gamma) \end{cases} \quad (22)$$

Po wstawieniu pochodnych (21), (22) oraz równań (20) do bazowego układu równań (19) i redukcji wyrazów podobnych oraz uwzględnieniu jedynki trygonometrycznej uzyskujemy:

$$\begin{cases} 2m(g - a\omega^2)A - Bma\omega^2 = 0 \\ Aa\omega^2 + B(g - a\omega^2) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

Rozwiązaniem trywialnym jest oczywiście para liczb A=0 i B=0, ale wówczas oznacza to brak ruchu drgającego. Zatem, aby układ (23) posiadał niezerowe rozwiązania względem amplitud A i B wyznacznik charakterystyczny układu równań (23) musi się zerować:

$$\begin{vmatrix} 2m(g - a\omega^2) & -ma\omega^2 \\ -a\omega^2 & g - a\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

Wyznacznik (24) ma po uporządkowaniu postać:

$$\omega^4 - \omega^2 \frac{4g}{a} + 2\left(\frac{g}{a}\right)^2 \quad (25)$$

Korzystając z podstawienia ω^2=u i obliczając pierwiastki równania otrzymujemy ostatecznie:

$$\omega_1^2 = \frac{2g}{a} - \frac{\sqrt{2}g}{a} \text{ oraz } \omega_2^2 = \frac{2g}{a} + \frac{\sqrt{2}g}{a} \quad (26)$$