

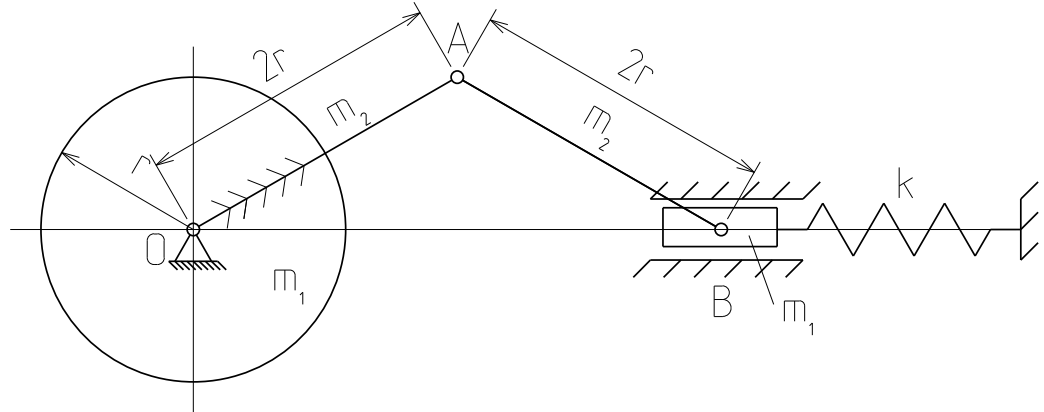
Rozwiązania zadań z kolokwium z mechaniki 3 (AiR),
grupa A

Łukasz Maciejewski, lukasz.maciejewski@pwr.wroc.pl

9 grudnia 2004 roku

Zadanie 1.

Dla układu przedstawionego na rys. 1 wyznaczyć równanie różniczkowe ruchu przy założeniu małych wychyleń z położenia równowagi. (25pkt)



Współrzędne uogólnione

Położenie mechanizmu jednoznacznie określa współrzędna ϕ :

$$q = \phi = \phi(t), \quad (1)$$

gdzie kąt ϕ to $\angle(AOB)$.

Energia kinetyczna układu

Energia kinetyczna tarczy i pręta OA

$$E_{k_1} = \frac{1}{2} I_O \dot{\phi}^2 \quad (2)$$

gdzie

$$I_z = I_{O_1} + I_{O_2} \quad (3)$$

a I_{O_1} to moment bezwładności tarczy policzony względem osi przechodzącej przez punkt O , natomiast I_{O_2} to moment bezwładności pręta względem tej samej osi. Dlatego też

$$I_O = r^2 \frac{3m_1 + 4m_2}{6}. \quad (4)$$

Stąd energia kinetyczna

$$E_{k_1} = r^2 \dot{\phi}^2 \frac{3m_1 + 4m_2}{12}. \quad (5)$$

Energia kinetyczna pręta AB

$$E_{k_2} = \frac{1}{2} m_2 v_D^2 + \frac{1}{2} I_D \dot{\phi}_1^2, \quad (6)$$

gdzie v_D jest prędkością środka ciężkości pręta I_D to moment bezwładności pręta AB względem osi prostopadłej przechodzącej przez jego środek ciężkości, natomiast $\dot{\phi}_1^2$ jest prędkością wokół chwilowego środka obrotu.

Analizując dokładniej geometrię układu można stwierdzić, że $\dot{\phi} = \dot{\phi}_1$. Odległość chwilowego środka obrotu pręta AB od środka ciężkości tego pręta wynosi $l = r\sqrt{1 + 8\sin^2\phi}$. Energię kinetyczną pręta AB można określić następująco

$$E_{k_2} = \frac{1}{2} m_2 (\dot{\phi} l)^2 + \frac{m_2 r^2}{12} \dot{\phi}^2. \quad (7)$$

Energia kinetyczna tłoka

$$E_{k3} = \frac{1}{2}m_1(z\dot{\phi})^2, \quad (8)$$

gdzie $z = 4r\sin\phi$.

Ostatecznie energia kinetyczna układu wyraża się następującą zależnością

$$E_k = E_{k1} + E_{k3} + E_{k3} = r^2\dot{\phi}^2 \frac{3m_1 + 4m_2}{12} + \frac{1}{2}m_2(\dot{\phi}\sqrt{1 + 8\sin^2\phi})^2 + \frac{m_2r^2}{12}\dot{\phi}^2 + m_18r^2\dot{\phi}^2\sin^2\phi. \quad (9)$$

Energia potencjalna układu

Energia potencjalna układu składa się tylko i wyłącznie z energii potencjalnej pochodzącej od sprężyny. Pomijamy w tym wypadku energię pochodzącą od prętów OA i AB . Można ją jednak uwzględnić jednak wtedy należałoby uwzględnić również ugięcie statyczne sprężyny, co ostatecznie i tak nie zmieniloby parametrów ruchu takich jak amplituda i częstotliwość, a jedynie wartość średnia amplitudy byłaby różna od zera.

Ostatecznie, więc energia potencjalna wyrażona może zostać zależnością:

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2, \quad (10)$$

a ponieważ

$$x = z\phi \quad (11)$$

gdzie

$$z = 4r\sin\phi \quad (12)$$

to

$$E_p = 8kr^2\phi\sin^2\phi \quad (13)$$

Równanie różniczkowe ruchu

Po wyznaczeniu poszczególnych członów równania Lagrange'a drugiego rodzaju i wykonaniu stosownych przekształceń otrzymujemy równanie różniczkowe ruchu postaci

$$\ddot{\phi}((3m_1 + 5m_2)r^2 + 48(2m_1r^2 + m_2)\sin^2\phi + 5m_2) + 48kr^2(\sin^2\phi + \phi\sin 2\phi) = 0. \quad (14)$$