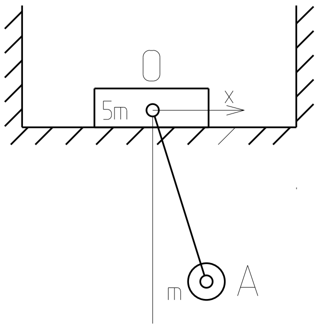
Rozwiązania zadań z kolokwium z mechaniki 3 (AiR), grupa B

Łukasz Maciejewski, lukasz.maciejewski@pwr.wroc.pl

23 listopada 2004 roku

Zadanie 1.

Dla układu przedstawionego na rys. 1 wyznaczyć równania różniczkowe ruchu. Należy przyjąć, że powierzchnia, po której porusza się suwak o masie $5m$ jest gładka a pręt łączący suwak z masą m jest nieważki. (25pkt)



Współrzędne uogólnione

Położenie suwaka określa współrzędna

$$q_1 = x = x(t). \tag{1}$$

Położenie masy skupionej m określa współrzędna

$$q_2 = \phi = \phi(t). \tag{2}$$

Współrzędne masy m w układzie kartezjańskim można zapisać następująco:

$$x_1 = x(t) + lsin(\phi(t)). \tag{3}$$

$$y_1 = -lcos(\phi(t)), \tag{4}$$

gdzie l jest długością wahadła.

Prędkości

Prędkość suwaka

$$v_s = \dot{x}. \tag{5}$$

Prędkość masy skupionej

$$v_w = \sqrt{(\dot{x} + \dot{\phi}lcos\phi)^2 + (\dot{\phi}lsin\phi)^2}. \tag{6}$$

Energia kinetyczna układu

Energia kinetyczna układu jest sumą energi kinetycznej suwaka E_{ks} oraz energii kinetycznej masy skupionej E_{kw}, gdzie

$$E_{ks} = \frac{5m\dot{x}^2}{2}, \tag{7}$$

oraz

$$E_{kw} = \frac{m}{2}[(\dot{x} + \dot{\phi}lcos\phi)^2 + (\dot{\phi}lsin\phi)^2] = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{\phi}lcos\phi + \dot{\phi}^2l^2). \tag{8}$$

Energia potencjalna układu

Energia potencjalna układu zależy tylko od położenia masy skupionej, więc

$$E_p = mgy_1 = -mglcos\phi. \tag{9}$$

Równanie Lagrange'a drugiego rodzaju

Przyjmujemy następującą postać równania Lagrange'a drugiego rodzaju:

$$\frac{d}{dt}[\frac{\delta(E_k - E_p)}{\delta \dot{q}_i}] - \frac{\delta(E_k - E_p)}{\delta q_i}. \tag{10}$$

Poszczególne wyrazy równania (10) dla współrzędnej $q_1 = x$ są następujące:

$$\frac{\delta E_k}{\delta \dot{x}} = \frac{m}{2}(12\dot{x} + 2\dot{\phi}lcos\phi), \tag{11}$$

$$\frac{\delta E_k}{\delta x} = 0, \tag{12}$$

$$\frac{\delta E_p}{\delta \dot{x}} = 0, \tag{13}$$

$$\frac{\delta E_p}{\delta x} = 0 \tag{14}$$

oraz

$$\frac{d}{dt}[\frac{\delta(E_k - E_p}{\delta \dot{x}}] = \frac{m}{2}(12\ddot{x} + 2\ddot{\phi}lcos\phi - 2\dot{\phi}^2 lsin\phi). \tag{15}$$

Poszczególne wyrazy równania Lagrange'a dla wspólrzędnej $q_2 = \phi$ są następujące:

$$\frac{\delta E_k}{\delta \dot{\phi}} = \frac{m}{2}(2\dot{x}lcos\phi + 2\dot{\phi}l^2), \tag{16}$$

$$\frac{\delta E_k}{\delta \phi} = \frac{m}{2}(-2\dot{x}\dot{\phi}lsin\phi), \tag{17}$$

$$\frac{\delta E_p}{\delta \phi} = mglsin\phi, \tag{18}$$

$$\frac{\delta E_p}{\delta \dot{\phi}} = 0 \tag{19}$$

oraz

$$\frac{d}{dt}[\frac{\delta(E_k - E_p}{\delta \dot{\phi}}] = \frac{m}{2}(2\ddot{x}lcos\phi - 2\dot{x}l\dot{\phi}sin\phi + 2\ddot{\phi}l^2). \tag{20}$$

Równania różniczkowe ruchu

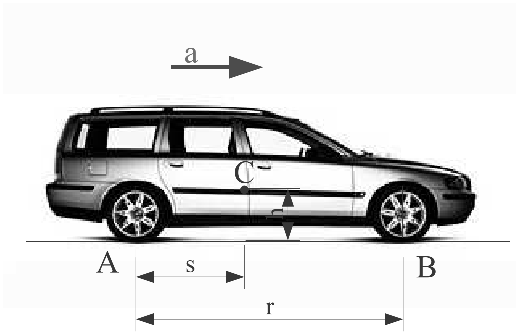
Ostatecznie wstawiając poszczególne wyrazy równania Lagrange'a do równania (10) otrzymujemy dwa równania różniczkowe ruchu:

$$6\ddot{x} + \ddot{\phi}lcos\phi - \dot{\phi}^2 lsin\phi = 0, \tag{21}$$

$$\ddot{x}cos\phi - \dot{x}\dot{\phi}sin\phi + \ddot{\phi}l - gsin\phi = 0. \tag{22}$$

Zadanie 2.

Określić wpółczynnik tarcia między kołami samochodu (rys. 2) a podłożem wiedząc, że samochód przyspiesza z przyspieszeniem a, gdy napędzane są wszystkie koła samochodu. Dany jest rozstaw osi r i położenie środka ciężkości samochodu określone długościami h i s. (15pkt)



Zasada d'Alemberta

Z zasady d'Alemberta wynika, że suma sił zewnętrznych, wewnętrznych oraz sił bezwładności danego układu punktów materialnych wynosi zero. To samo stwierdzenie dotyczy sumy momentów tych sił względem punktu stałego lub środka masy.

Dla przedstawionego na rysunku pojazdu można więc zapisać następujące warunki równwagi:

$$T_A + T_B - ma = 0, \tag{23}$$

$$N_A + N_B = mg, \tag{24}$$

$$-mah - mgs + N_B r = 0, \tag{25}$$

$$mg(r - s) - N_A r - mah = 0, \tag{26}$$

gdzie $T_A = \mu N_A, T_B = \mu N_B$

Na podstawie powyższego współczynnik tarcia można wyrazić zależnością

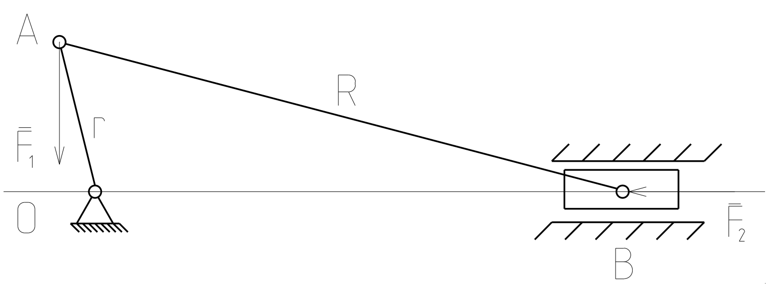
$$\mu = \frac{ma}{N_A + N_B}, \tag{27}$$

która po podstawieniu wyrażeń na siły N_A i N_B ostatecznie przyjmie postać

$$\mu = \frac{a}{g}. \tag{28}$$

Zadanie 3.

Dla mechanizmu przedstawionego na rys. 3 wyznaczyć zależność między pionową siłą F_1 a poziomą siłą F_2 działającymi, gdy mechanizm znajduje się w położeniu równowagi określonym kątami α i β. Założyć, że poszczególne człony mechanizmu są nieważkie a w przegubach nie występuje tarcie. (15pkt)



Przemieszczenia przygotowane

Poczatek kartezjańskiego układu współrzędnych zaczepiamy w punkcie O. Przyjmijmy, ze kąt α jest kątem ostrym jaki tworzy człon AB z osią x, zaś kąt β jest kątem ostrym jaki tworzy korba OA również z osią x.

Siła F_1 jest przyłożona w punkcie A i działa pionowo. Współrzedna pionowa punktu A jest określona następująco:

$$y_A = Rsin\alpha. \tag{29}$$

Siła F_2 jest przyłożona w punkcie B i działa poziomo. Współrzędna pozioma punktu B wyraża się zależnością:

$$x_B = Rcos\alpha - rcos\beta. \tag{30}$$

Udzielamy wezłom A i B przemieszczeń przygotowanych

$$\delta y_A = \frac{Rsin\alpha}{\delta\alpha}\delta\alpha, \tag{31}$$

$$\delta x_B = \frac{Rcos\alpha}{\delta\alpha}\delta\alpha - \frac{rcos\beta}{\delta\alpha}\delta\alpha. \tag{32}$$

Mechanizm posiada jeden stopień swobody, więc do opisania jego położenia w dowolnej chwili czasu wystarczy jedna współrzędna uogólniona. Zauważyć można, że

$$rsin\alpha = Rsin\beta \tag{33}$$

a następnie skorzystać z jedynki trygonometrycznej

$$cos\beta = \sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2}sin^2\alpha}. \tag{34}$$

Ostateczna postać przemieszczenia przygotowanego x_B wygląda następująco

$$\delta x_B = \frac{Rcos\alpha}{\delta\alpha}\delta\alpha - \frac{r\sqrt{1 - \frac{R^2}{r^2}sin^2\alpha}}{\delta\alpha}\delta\alpha. \tag{35}$$

Prace przygotowane

Korzystając z definicji pracy przygotowanej można stwierdzić, że

$$\delta W = \vec{F_1}\delta\vec{y_A} + \vec{F_2}\delta\vec{x_B} = 0. \tag{36}$$

Po podstawieniu odpowiednich zależności i zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$\delta W = F_1 Rcos\alpha\delta\alpha - F_2(Rsin\alpha - \frac{R^2cos\alpha sin\alpha}{r\sqrt{1 - \frac{r^2}{R^2}sin^2\alpha}}) = 0 \tag{37}$$

a stąd

$$F_1 = F_2(\frac{sin\alpha}{cos\alpha} - \frac{Rcos\alpha sin\alpha}{rcos\beta cos\alpha}). \tag{38}$$

Zadanie 4.

Określić wpółczynnik tarcia między kołami samochodu (rys. 2) a podłożem wiedząc, że samochód przyspiesza z przyspieszeniem a, gdy napędzane są wszystkie koła samochodu. Dany jest rozstaw osi r i położenie środka ciężkości samochodu określone długościami h i s. (15pkt)

Prędkość kątowa samolotu

$$\omega_1 = \frac{v}{R}[s^{-1}]. \tag{39}$$

Prędkość kątowa silnika

$$\omega_2 = \frac{\pi n}{30}[s^{-1}]. \tag{40}$$

Moment żyroskopowy

Teorię momentu żyroskopowego możemy stosować, gdy $\omega_2 \gg \omega_1$. Z definicji moment żyroskopowy to

$$M_{\dot{z}} = I \times (\omega_1 \times \omega_2). \tag{41}$$

Ponieważ $\angle(\omega_1, \omega_2)$ wynosi 90deg możemy zapisać, że

$$M_{\dot{z}} = I_0 \omega_1 \omega_2 \tag{42}$$

a po podstawieniu wyliczonych wcześniej prędkości

$$M_{\dot{z}} = I_0 \frac{v}{R} \frac{\pi n}{30}. \tag{43}$$

Możliwa do uzyskania suma punktów wynosi **65**. Pozytywny wynik kolokwium gwarantuje uzyskanie **40 punktów** przy **jednoczesnym**, poprawnym rozwiązaniu zadania 1. Przewidywana skala ocen: 40-45 pkt. – **3**; 46-50 pkt. – **3,5**; 51-55 pkt – **4**; 56-60 pkt. – **4,5**; 61-65 pkt. – **5**. Wyniki kolokwium zostaną opublikowane na stronie www: http://www.immt.pwr.wroc.pl/∼lukasz.