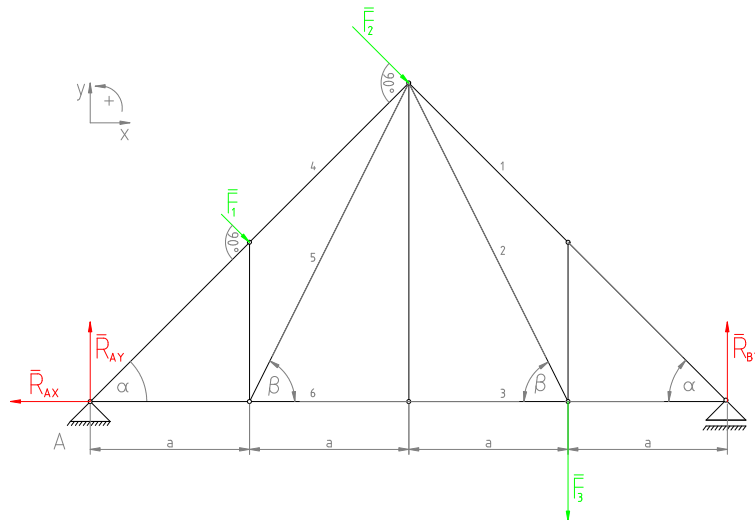


Łukasz Maciejewski

Kratownica – przykład rozwiązania metodą
Rittera

Zadanie

Obliczyć siły reakcji oraz siły wewnętrzne we wskazanych na rysunku prętach kratownicy mając dane $F_1 = 10kN$, $F_2 = 20kN$, $F_3 = 30kN$, długość $a = 1m$ oraz kąt $\alpha = 45^\circ$.



Rysunek 1. Zadana kratownica

Rozwiązanie

Statyczna zewnętrzna wyznaczalność

Kratownica jest zewnętrznie statycznie wyznaczalna, gdy liczba niewiadomych podporowych n jest równa liczbie równań równowagi r , które dla danej kratownicy można ułożyć:

$$n = r. \quad (1)$$

Dla zadanej kratownicy liczba niewiadomych podporowych $n = 3$. Są to siły reakcji R_{Ax} , R_{Ay} i R_{By} . Liczba równań równowagi $r = 3$. Są to suma rzutów wszystkich sił na oś X , suma rzutów wszystkich sił na oś Y oraz suma momentów względem wybranego bieguna np. punktu A .

Statyczna wewnętrzna wyznaczalność

Kratownica jest wewnętrznie statycznie wyznaczalna, gdy liczba prętów l jest określona następującą zależnością:

$$l = 2w - 3, \quad (2)$$

gdzie w jest liczbą węzłów w kratownicy. Dla kratownicy podanej na rysunku

$$13 = 13. \quad (3)$$

Reakcje w podporach

W celu wyznaczenia sił reakcji w podporach układamy trzy równania równowagi:

$$\Sigma F_{iX} = 0, \quad (4)$$

$$\Sigma F_{iY} = 0, \quad (5)$$

$$\Sigma M_i^A = 0, \quad (6)$$

czyli odpowiednio zerowanie się sumy rzutów wszystkich sił na oś X, zerowanie się sumy rzutów wszystkich sił na oś Y oraz zerowanie się momentów względem punktu A.

Równanie (4) dla zadanej kratownicy ma następującą postać:

$$-R_{AX} + F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \alpha = 0. \quad (7)$$

Stąd

$$R_{AX} = \frac{\sqrt{2}}{2}(F_1 + F_2) = 15\sqrt{2} \quad [\text{kN}]. \quad (8)$$

Równanie (5) w przypadku zadanej kratownicy można zapisać następująco:

$$R_{AY} + R_{BY} - F_3 - (F_1 + F_2) \cos \alpha = 0. \quad (9)$$

Równanie (6) natomiast, zakładając dodatni kierunek momentów przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara, ma postać:

$$R_{BY} 4a - F_3 3a - F_1 a \sqrt{2} - F_2 2a \sqrt{2} = 0. \quad (10)$$

Rozwiązując układ równań uzyskujemy wartości szukanych sił reakcji:

$$R_{AX} = 15\sqrt{2} \quad [\text{kN}], \quad (11)$$

$$R_{AY} = 2,5\sqrt{2} + 7,5 \quad [\text{kN}], \quad (12)$$

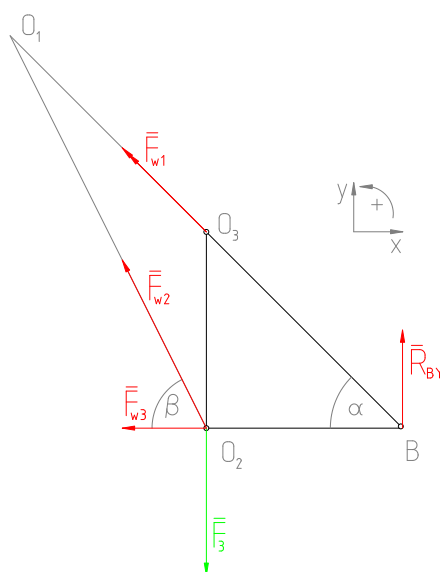
$$R_{BY} = 12,5\sqrt{2} + 22,5 \quad [\text{kN}]. \quad (13)$$

Siły w prętach

Siły we wskazanych prętach zostaną obliczone metodą Rittera. Metoda ta pozwala na wyznaczenie sił w trzech prętach kratownicy, które:

- są nierównoległe,
- nie schodzą się w jednym węźle,
- po przecięciu rozdziela kratownicę na dwie części.

Po przecięciu prętów nr 1, nr 2 i nr 3 (Rysunek 2) wybieramy trzy bieguny Rittera O_1 , O_2 i O_3 . Zasada jaką należy się kierować jest taka, że bieguny nie mogą leżeć na jednej prostej. Dodatkowo warto je przyjmować w punktach leżących na linii działania sił.



Rysunek 2. Siły wewnętrzne w prętach nr 1, nr 2 i nr 3

Względem obranych biegunów obliczamy sumy momentów:

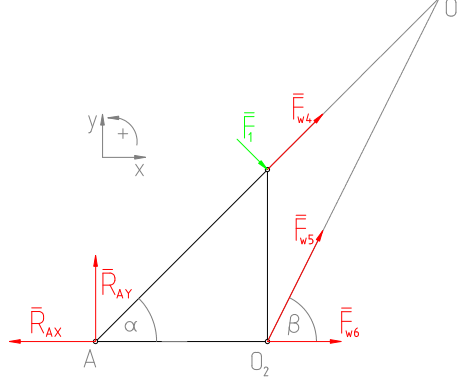
$$\Sigma M_i^{O_1} = R_{BY}2a - F_3a - F_{w3}2a = 0 \quad (14)$$

$$\Sigma M_i^{O_2} = R_{BY}a + F_{w1}a \cos \alpha = 0 \quad (15)$$

$$\Sigma M_i^{O_3} = R_{BY}a - F_{w3}a - F_{w2}a \sin \beta = 0. \quad (16)$$

Stąd, rozwiązując układ równań, znajdujemy wartości sił wewnętrznych $F_{w1} = -(22,5\sqrt{2} + 25)$, $F_{w2} = 3\sqrt{5}$ i $F_{w3} = 12,5\sqrt{2} + 7,5$.

Po przecięciu kratownicy w prętach nr 4, nr 5 i nr 6 (Rysunek 3) znajdziemy siły wewnętrzne w tych prętach analogicznie jak w poprzednim przypadku. Obieramy trzy bieguny Rittera A , O_1 i O_2 .



Rysunek 3. Siły wewnętrzne w prętach nr 4, nr 5 i nr 6

Względem obranych biegunów obliczamy sumy momentów:

$$\Sigma M_i^{O_1} = F_1a\sqrt{2} + F_{w6}2a - R_{AY}2a - R_{AX}2a = 0, \quad (17)$$

$$\Sigma M_i^{O_2} = -F_{w4}a\frac{\sqrt{2}}{2} - F_1a\frac{\sqrt{2}}{2} - R_{AY}a = 0, \quad (18)$$

$$\Sigma M_i^A = F_{w5}a \sin \beta - F_1a\sqrt{2} = 0. \quad (19)$$

Stąd, rozwiązując układ równań, znajdujemy wartości sił wewnętrznych $F_{w4} = -7,5(\sqrt{2} + 2)$, $F_{w5} = 2\sqrt{10}$ i $F_{w6} = 12,5\sqrt{2} + 7,5$.

Tabela 1. Wartości sił reakcji oraz sił wewnętrznych we wskazanych prętach

Siła	Wartość [kN]
R_{AX}	$15\sqrt{2}$
R_{AY}	$2,5\sqrt{2} + 7,5$
R_{BY}	$12,5\sqrt{2} + 22,5$
F_{w1}	$-(22,5\sqrt{2} + 25)$
F_{w2}	$3\sqrt{5}$
F_{w3}	$12,5\sqrt{2} + 7,5$
F_{w4}	$-7,5(\sqrt{2} + 2)$
F_{w5}	$2\sqrt{10}$
F_{w6}	$12,5\sqrt{2} + 7,5$

Ujemna wartość siły oznacza, że założony na wstępie kierunek działania siły jest odwrotny do rzeczywistego. Ponieważ założono, że wszystkie pręty są rozciągane znak minus oznacza, że dany pręt jest ściskany.

Literatura

[1] B. Gabryszewska, A. Pszonka: *Mechanika. Część I. Statyka*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1995.

[2] Z. Jaśniewicz: *Zbiór zadań ze statyki*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1996.